В предлагаемом пособии содержится два типовых расчета:

1. типовой расчет по теории вероятностей,
2. типовой расчет по математической статистике.

**Типовой расчет по теории вероятностей**.

В данном типовом расчете предлагается 30 задач по каждой из 6 тем, пере- численных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необ- ходимо – примеры. Темы заданий

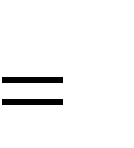
1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Формула полной вероятности и формула Байеса.
3. Повторение опытов (схема Бернулли).
4. Дискретные случайные величины.
5. Непрерывные случайные величины.
6. Функции случайных величин.

Встречающиеся ниже ссылки даны на страницы учебного пособия “Элементы теории вероятностей и математической статистики”, СПбГИТМО, 2001 год, ав- торы – Н.А. Бодрова, Т.В. Родина, И.А. Суслина, под редакцией В.П. Смирнова.

**Тема 1**

**Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схе- мы. Теоремы сложения и умножения вероятностей**

*Если результаты эксперимента можно представить в виде полной группы исходов, которые попарно несовместны и равновозможны, то вероятность события A равна отношению числа m благоприятствующих этому событию исходов эксперимента к общему числу n всех возможных исходов, т.е.*

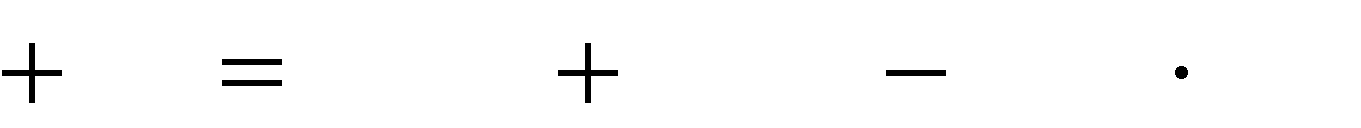


*m*

*n*

*P(A) .*

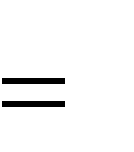
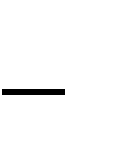
*Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих собы- тий без вероятности их совместного наступления:*



*B*) *P*( *A*) *P*(*B*) *P*(*A B*).

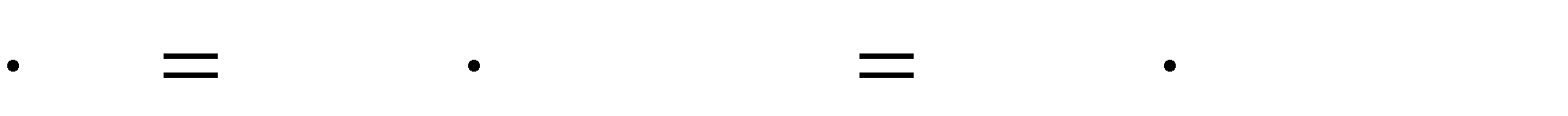
*P*( *A*

*При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события A , а затем найти вероятность события A по формуле*

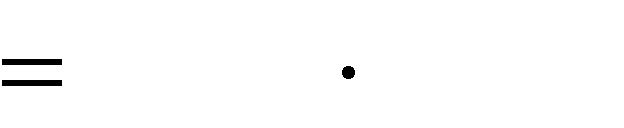


*P(A) 1 P( A). Вероятность совместного наступления двух событий равна*

*вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:*



*B*) *P*(*A*) *P*(*B* / *A*) *P*(*B*) *P*(*A* / *B*).

*P*( *A*

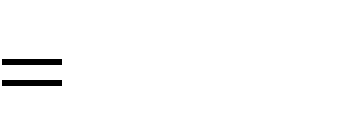
*События A и B называются независимыми, если*

*P*( *AB*)

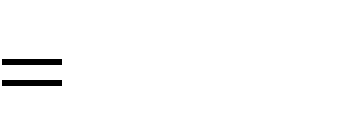
*P*( *A*)

*P*(*B*) *. Для не-*

*зависимых событий появление одного не меняет вероятности появления*



*P*( *A*)



*P*(*B*)

*другого: P*( *A* / *B*)

*и P*(*B* / *A*)

(*см. с. 10-17 учебного пособия*).

***Задача 1.*** В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, при- чем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали.

*Найти* вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей ока- жет-ся стандартной.

***Задача 2.*** Станция метрополитена оборудована тремя независимо работа- ющими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для пер- вого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85.

*Найти* вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

***Задача 3.*** На складе имеются 8 изделий, 3 из них изготовлены заводом *N*.

*Найти* вероятность того, что среди 4 наудачу взятых изделий окажется не более половины, изготовленных заводом *N*.

***Задача 4.*** У распространителя имеется 20 билетов книжной лотереи, среди которых 7 выигрышных. Куплено 3 билета.

*Найти* вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрыш- ный.

***Задача 5.*** Устройство секретного замка включает в себя 4 ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из четырех букв ***A*, *B*, *C*, *D*,** в трех осталь- ных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться). *Чему* равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

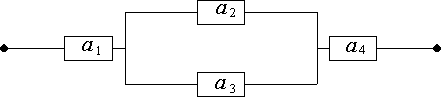
***Задача 6.*** Имеются две урны. В первой находятся: один белый шар, 3 чер- ных и 4 красных; во второй – 3 белых, 2 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, после чего сравнивают их цвета.

*Найти* вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

***Задача 7.*** Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных.

*Найти* вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся вы- игрышными.

***Задача 8.*** Электросхема, состоящая из 4 элементов имеет вид



Выход из строя элементов – события независимые в совокупности.

*Какова* вероятность того*,* что схема обесточится, если вероятность выхода

из строя элементов ***a*** 1 , ***a*** 2 , ***a*** 3 , ***a*** 4

соответственно 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

***Задача 9.*** Два охотника по одному разу стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в волка 0,7, для второго – 0,8.

*Определить* вероятность того, что в волка попадет хотя бы один охотник.

***Задача 10.*** Ведется стрельба по самолету, уязвимым агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы вывести из строя са- молет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При дан- ных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна ***Р1***, второго двигателя - ***Р****2*, кабины пилота - ***Р3***. Агрегаты самолета поражаются не- зависимо друг от друга.

*Найти* вероятность того, что самолет будет поражен.

***Задача 11.*** По мишени производятся три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно ***Р1*** = 0,4;

***Р2*** = 0,5; ***Р3*** = 0,7.

*Какова* вероятность того*,* что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется точно одна пробоина.

***Задача 12.*** Студент знает 20 из 25 вопросов программы.

*Найти* вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменато- ром три вопроса.

***Задача 13.*** Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается наличие бракован- ных изделий не более одного из пятидесяти.

***Задача 14.*** Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в тече- ние смены его внимания потребует первый станок, равна 0,7, второй – 0,75, третий – 0,8.

*Найти* вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потре- буют не менее двух станков.

***Задача 15.*** В связке имеются пять различных ключей, из которых только одним можно отпереть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется.

*Найти* вероятность того, что для отпирания двери будет использовано не более двух ключей.

***Задача 16.*** Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4.

*Найти* вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

***Задача 17.*** Студенты выполняют экзаменационную работу в классе кон- тролирующих машин. Работа состоит из трех задач. Для получения положи- тельной оценки достаточно решить две. Для каждой задачи зашифровано пять

ответов, из которых только один правильный. Студент *N* плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу.

*Какова* вероятность того, что он получит положительную оценку?

***Задача 18.*** В электрическую цепь включены параллельно два прибора. Ве- роятность отказа первого прибора равна 0,1, второго 0,2.

*Найти* вероятность того, что откажет хотя бы один прибор этой цепи.

***Задача 19.*** Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,6.

*Найти* вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного ма- териала.

***Задача 20.*** Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность то- го, что студент ответит на первый и второй вопросы одинакова, и равна 0,9, на третий – 0,8.

*Найти* вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необ- ходимо ответить, по крайней мере, на два вопроса билета.

***Задача 21.*** Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для каждой игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей, мячи бывшие в употреблении, от ни разу не использованных не отличаются.

*Какова* вероятность того*,* что после трех игр в коробке не останется мячей, не побывавших в игре?

***Задача 22.*** Вычислительный центр, который должен производить непре- рывную обработку информации, располагает двумя вычислительными устрой- ствами. Известно, что каждое из них имеет вероятность отказа за некоторое время, равную 0,2.

*Требуется* определить вероятность:

а) того, что откажет только одно устройство; б) не откажет ни одно из устройств.

***Задача 23.*** Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу.

*Определить* вероятность того, что ему придется звонить не более чем в че- тыре места.

***Задача 24.*** Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу 4 карты.

*Найти* вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

***Задача 25.*** Вероятность поражения стрелком мишени при каждом выстреле равна 0,9.

*Найти* вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет меньше четырех промахов.

***Задача 26.*** Двое играют в шахматы. Игра проводится до выигрыша одним из игроков двух партий подряд. Вероятность выигрыша партии каждым игро- ком равна 0,5 и не зависит от исхода предыдущих партий.

*Найти* вероятность того, что игра окончится до четвертой партии.

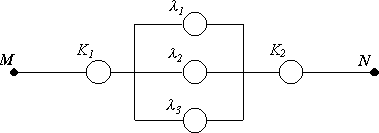
***Задача 27.*** При включении зажигания двигатель начинает работать с веро- ятностью 0,95.

*Найти* вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется вклю- чать зажигание не более трех раз.

***Задача 28.*** Электрическая цепь между точками *M* и *N* составлена по схеме, приведенной на рисунке. Выход из строя за время *T* различных элементов цепи – независимые события, имеющие следующие вероятности:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| элемент | ***K1*** | ***K2*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** |
| вероятность | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,7 | 0,9 |

*Определить* вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.



***Задача 29.*** Продукция может быть получена из доброкачественных дета- лей, изготовленных из заготовок с применением двух технологий; в первом случае заготовка проходит три технологические операции, вероятности полу- чения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Во вто- ром случае имеются две операции, вероятности получения брака при ко-торых одинаковы и равны 0,3.

*Определить*, какая технология обеспечивает большую вероятность получе- ния первосортной продукции из заготовки, если в первом случае для доброка- чественной детали вероятность получения из нее первосортной продукции рав- на 0,9, а во втором 0,8.

***Задача 30.*** Устройство состоит из трех элементов, работающих независи- мо. Вероятности безотказной работы за время ***T*** первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8.

*Найти* вероятности того, что в промежутке времени ***T*** будут безотказно ра- ботать:

а) только один элемент; б) ровно два элемента.

**Тема 2**

**Формула полной вероятности и формула Байеса**

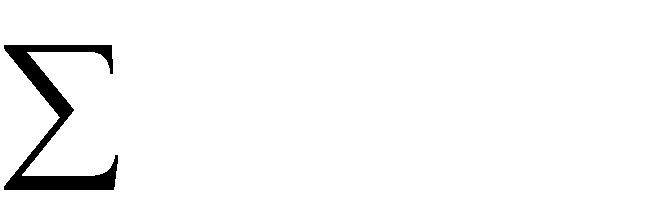
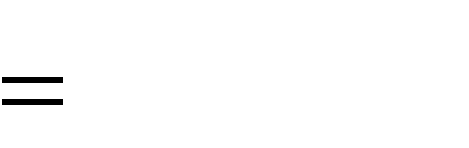
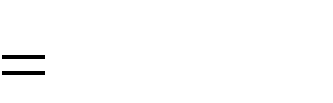
*Будем говорить, что события H1, H2, … Hn образуют полную группу, если в результате эксперимента:*

*-происходит одно из событий Hi , i=1,…, n.*

*-события H1, H2, … Hn попарно несовместны.*

*В этом случае имеем: P(H1 + H2 + … + Hn ) = P(H1) + P(H2) + … + P(Hn) = 1, и вероятность произвольного события А, произошедшего в условиях данного эксперимента может быть вычислена по формуле полной вероятности:*

*n*



*P*(*A*)

*P*(*Hi* )*P*(*A*/ *Hi* ).

*i* 1

*События H1,…,Hn часто называют гипотезами* (*см. с. 21-23 учебного пособия*).

***Пример 1:*** *В коробке находится 4 новых и 3 старых теннисных мяча. Для первой игры берут случайным образом 2 мяча, после игры кладут их обратно.*

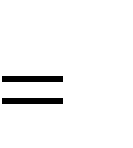
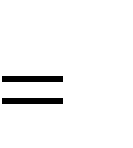
*Какова вероятность того, что 2 мяча, взятые для 2-ой игры будут новые?*

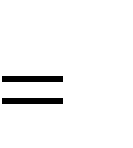
***Решение:*** *Рассмотрим следующие гипотезы:*

*H1 - для первой игры взяты 2 новых мяча;*

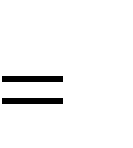
*H2 - для первой игры взяты 1 новый и 1 старый мячи; H3 - для первой игры взяты 2 старых мяча.*

*Событие А заключается в том, что для второй игры взяли 2 новых мяча. Используя классическое определение вероятности (слова – “случайным об-*

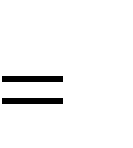
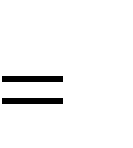
*разом“ позволяют считать, что исходы равновозможны) имеем:*



2



4

*C* 2 4!

2! 5!

*C*1 *C*1

4 3 2! 5!

*P*(*H*1 )

4

; *P*(*H*2 )

4 3 ;

2 2! 2! 7! 2 7! 7

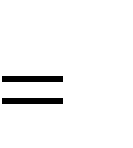
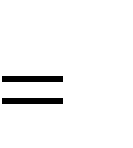
*C*

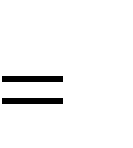
*C*

7

7

7

*C* 2 3! 2! 5!



1



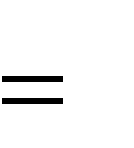
*P*(*H*3 )

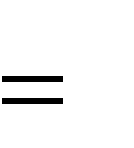
3 ;

2 2! 1! 7! 7

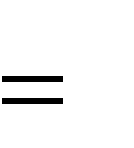
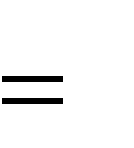
*C*

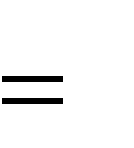
7

*C* 2

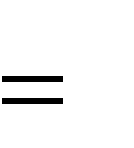


1

*C* 2 *C* 2



1



2

*C*

3

*P*( *A* / *H*1 ) 2

*C*

2

7

7

21; *P*( *A*/ *H* 2 ) 2 7 ;

*P*( *A*/ *H*3 ) 4 .

7 7

*C*

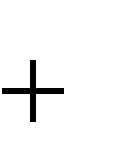
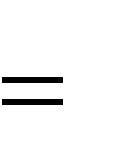
2

*Отсюда:*

*P*( *A*)

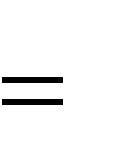
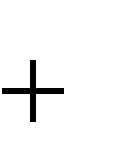
2 1 4 1

7 21 7 7

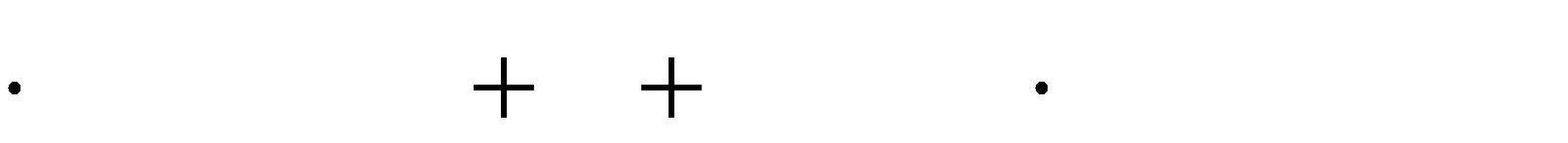
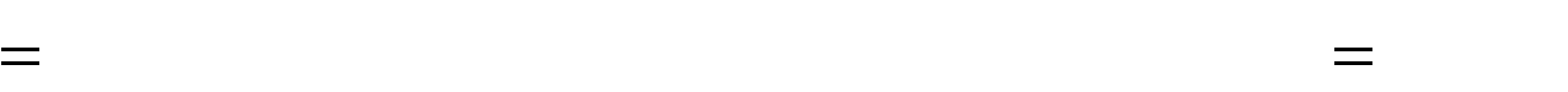
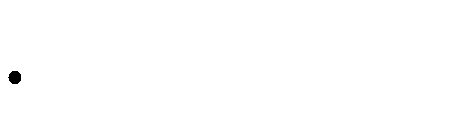


1 2 20 .

7 7 147



*Пусть H1, H2, … Hn - полная группа событий и известно, что в результате эксперимента произошло событие А, тогда условная вероятность того, что произошло событие Нi - одно из событий полной группы, вычисляется по фор-*



*P*(*Hi* ) *P*(*A*/ *Hi* )

*P*(*H*1) *P*(*A*/ *H*1) ... *P*(*Hn*) *P*(*A*/ *Hn*)

, *i* 1,..., *n*.

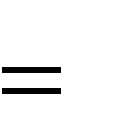
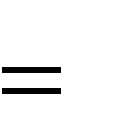
*муле Байеса:*

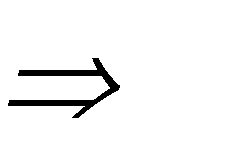
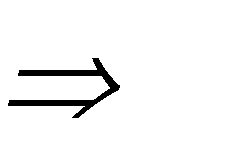
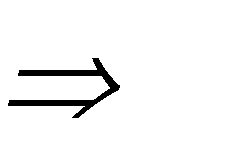
*P*(*Hi*

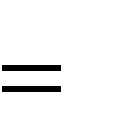
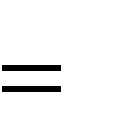
/ *A*)

***Пример 2:*** *Два стрелка по одному разу стреляли по мишени. Известно, что один попадает с вероятностью 0,8; второй - с вероятностью 0,6. После стрельбы в мишени оказалась одна пробоина.*

*Какова вероятность того, что попал второй стрелок?*

***Решение:*** *Выберем гипотезы следующим образом:*

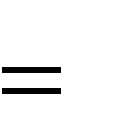
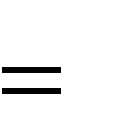


*H1 - не попал ни первый стрелок, ни второй*

*P*(*H*1 )

0,2 0,4

0,08;

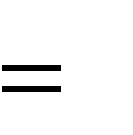
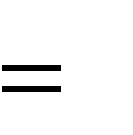
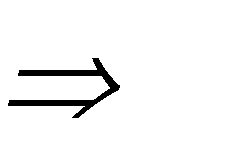
*H2 - попал первый стрелок и не попал второй*

*P*(*H* 2 )

0,8

0,4

0,32;

*H3 - не попал первый стрелок и попал второй*

*P*(*H*3 )

0,2 0,6

0,12;

*H4 - попали оба стрелка*

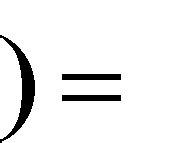
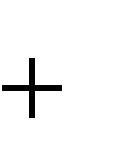
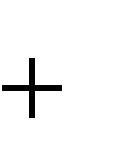
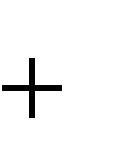
*P*(*H* 4 )

0,8 0,6

0,48.

*Тогда, если А - событие, состоящее в том, что один стрелок попал, то: P(А/H1) = 0, P(А/H2) = 1, P(А/H3) = 1, P(А/H4) = 0.*

*Очевидно, что нам надо вычислить вероятность события Н3 при условии, что произошло событие А:*

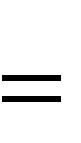


*P*(*H 3* ) *P*( *A/H 3* )

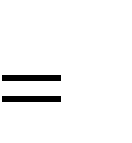
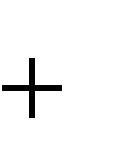
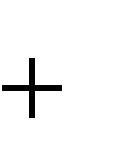
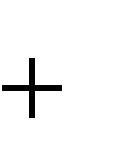
*P*(*H1* ) *P*( *A/H1* ) *P*(*H 2* ) *P*( *A/H 2* ) *P*(*H3* ) *P*( *A/H 3* ) *P*(*H 4* ) *P*( *A/H 4* )

*P(H3*

*/A*

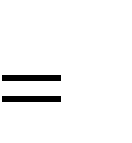
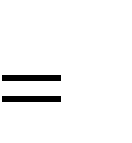


0.12 3 .



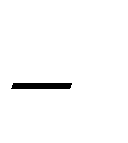
0.12

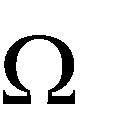
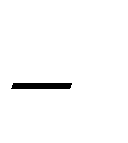
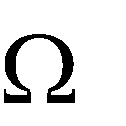
0.12 0 0.32 1 0.12 1 0.48 0



0.44 11

***Замечание.*** *В рассмотренном примере мы воспользовались независимостью*

*экспериментов:* 1 *стреляет первый стрелок и стреляет второй*



2

*стрелок, которая следует из того, что вероятности попаданий фиксированы.* ***Задача 1.*** Два стрелка Иванов и Петров, имеющие по два заряда, поочерѐдно стреляют в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна 2/3 для первого стрелка и 5/6 для второго. Первый стрелок определяется по жребию.

Для этого кидается монета и, если выпадает герб, то начинает Иванов, а, если цифра, то первым стреляет Петров. Выигрывает стрелок, попавший первым.

*Какова* вероятность выигрыша для Петрова?

***Задача 2.*** Два стрелка ***A*** и ***B*** поочерѐдно стреляют в мишень до первого по- падания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном вы- стреле для ***A*** равна 0,8, для ***B*** – 0,6. Первый стрелок определяется жребием: ки- дается монета и, если выпадает герб, то первым стреляет ***A***, если цифра, то ***B***. В результате стрельбы выиграл стрелок ***B***.

*Какова* вероятность, что он стрелял первым?

***Задача 3.*** Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишенейВероятность выбора 1-ой мишени для них 0,5 и 2/3 соответственно, а вероятность попадания в выбранную мишень 0,8 и 0,9.

*Какова* вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

***Задача 4.*** Два игрока ***A*** и ***B*** один раз бросают кость и затем два раза монету. Если на кости выпадает 1 или 2, то выигрывает игрок ***A***, если при подбрасыва- ниях монеты появится хотя бы один герб, и игрок ***B***, если гербов не появится.

Если же на кости выпадает число, большее двух, то игрок ***А*** выигрывает, если появятся два герба, и игрок ***B*** в остальных случаях.

*Справедлива* ли игра*?*

***Задача 5.*** В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 16 штук сор- та «Белочка» и 8 штук сорта «Жар-птица», во втором 15 сорта «Белочка» и 5 сорта «Жар-птица». Из первого пакета во второй переложили две конфеты, взя- тые случайным образом, содержимое второго пакета перемешали и вытащили оттуда одну конфету, которая оказалась «Жар-птицей».

*Какова* вероятность, что из первого пакета во второй переложили одну «Бе- лочку» и одну «Жар-птицу»?

***Задача 6.*** Берут две колоды карт по 52 карты и из первой во вторую пере- кладывают случайным образом 2 карты. Затем из второй колоды берѐтся одна карта.

*Какова* вероятность, что она окажется дамой?

***Задача 7.*** Среди трѐх игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестѐрка появляется с вероятностью 1/3. Бросили две кости и выпали две шестерки.

*Какова* вероятность, что среди брошенных костей была фальшивая?

***Задача 8.*** Ракета накрывает цель с вероятностью 2/3. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятно-

стью 1/2, а при двух с вероятностью 5 6 . Цель поражена.

*Какова* вероятность, что в неѐ попала ровно одна ракета?

***Задача 9.*** Кость ***А*** имеет две белые и четыре красные грани, кость ***В*** две красные и четыре белые. Сначала бросается монета. Если выпадает герб, то бросают кость ***А***, если цифра, то кость ***В***.

*Какова* вероятность того, что выпадет красная грань?

***Задача 10.*** 30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% со второй и остальные с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3% и 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным.

*Какова* вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?

***Задача 11.*** Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложи- ли две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась картой пиковой масти.

*Какова* вероятность того, что среди переложенных карт не было карт пиковой масти?

***Задача 12.*** Готовясь к экзамену, студент должен был подготовить ответы на две серии вопросов, каждая из которых содержала по 10 вопросов. Он вы- учил 9 вопросов первой серии и 8 второй. Экзаменатор случайно выбирает се- рию вопросов и два вопроса из нее, на оба из которых студент должен ответить.

*Каковы* шансы, что студент сдаст экзамен?

***Задача 13.*** В трѐх одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 1 до 9 , во второй от 10 до 20 и в третьей от 21 до 30 включительно. Из слу- чайно взятой урны берѐтся шар и оказывается, что его номер делится на 5.

*Какова* вероятность, что этот шар взят из первой урны?

***Задача 14.*** В трѐх одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25 , во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно взятой урны берѐтся шар.

*Какова* вероятность, что его номер будет простым числом?

***Задача 15.*** Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счѐт в игре в первом случае равен количеству очков, выпавших на кости, а во втором – сумме очков, выпавших на обеих костях. Вы слышите, что выпало два очка.

*Какова* вероятность, что играют в игру с одной костью?

***Задача 16.*** На трѐх дочерей Аню, Катю и Анфису в семье возложена обя- занность по мытью тарелок. Аня, как старшая, выполняет 40% всей работы, ос- тальную работу Катя и Анфиса делят пополам. Вероятность того, что Аня разо- бьѐт хотя бы одну тарелку равна 0,02, для Кати и Анфисы эта вероятность рав- на 0,03 и 0,02 соответственно. Родители слышали звон разбитой посуды.

*Какова* вероятность, что тарелки мыла Аня?

***Задача 17.*** Первая урна содержит 3 красных, 2 белых и 1 синий шар. Вто- рая урна содержит 4 белых и 2 синих шара. Бросается игральная кость. Если на ней выпало 1 или 6 очков, вынимается шар из первой урны, в противном случае – из второй. Вытащен синий шар.

*Какова* вероятность, что он взят из второй урны?

***Задача 18.*** Если при бросании кости выпадает больше 2-х очков, то выни- мают 2 шара из первой урны, содержащей 1 красный и 4 чѐрных шара. Иначе два шара берутся из второй урны, содержащей 3 красных и 2 чѐрных шара.

Вытащили 1 красный и 1 чѐрный шар.

*Какова* вероятность, что они взяты из первой урны?

***Задача 19.*** Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 бе- лых и 2 чѐрных шара; во втором ящике - 3 чѐрных; в третьем - 1 чѐрный и 5 бе- лых. Некто, случайным образом выбирая ящик, наугад вынимает из него шар.

*Какова* вероятность, что шар будет белый?

***Задача 20***. На шахматную доску 4×4 ставят два коня.

*Какова* вероятность того, что они бьют друг друга?

***Задача 21.*** На шахматную доску 4×4 ставят два ферзя.

*Какова* вероятность того, что они бьют друг друга?

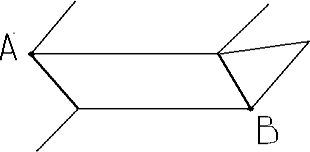
***Задача 22.*** На шахматную доску 4×4 ставят два слона.

*Какова* вероятность того, что они не бьют друг друга?

***Задача 23.*** На шахматную доску 4×4 ставят две ладьи.

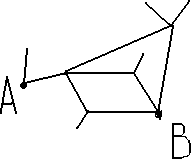
*Какова* вероятность того, что они бьют друг друга?

***Задача 24.*** Некто, выходя из точки ***А,*** на перекрѐстках равновероятно вы- бирает любую дорогу кроме той, по которой пришѐл.

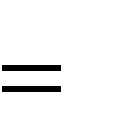


*Какова* для него вероятность попасть в точку ***В***?

***Задача 25.*** Некто, выходя из точки ***А****,* на перекрѐстках равновероятно вы- бирает любую дорогу кроме той, по которой пришѐл.



*Какова* вероятность того*,* что он попадѐт в точку ***В***?

***Задача 26.*** На "жульнической" кости 5 и 6 очков выпадают с вероятностью



1

*p*(5)

*p*(6)

3 . Остальные грани выпадают с равными вероятностями.

*Какова* вероятность выиграть этой костью против "честной" кости, если каждый игрок бросает свою кость один раз?

***Задача 27.*** Половина всех арбузов поступает в магазин с 1 базы, 1/3 - со 2 базы, остальные - с 3 базы. Арбузы с повышенным содержанием нитратов со- ставляют на 1 базе 15%, на 2 базе - 10%, на 3 - 20%.

*Какова* вероятность купить недоброкачественный арбуз?

***Задача 28.*** В одном ящике было 3 чѐрных и 2 белых шара, в другом - 1 чер- ный и 4 белых. Некто унѐс один шар, взяв его наугад из случайно выбранного ящика*.*

*Какова* теперь вероятность вынуть наугад чѐрный шар?

***Задача 29.*** Три стрелка случайным образом распределяют между собой 3 заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностя- ми 1/2, 3/4 и 7/8 соответственно*.*

*Какова* вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

***Задача 30.*** Из 4-х игральных костей одна фальшивая. На ней 6 очков выпа- дает с вероятностью 1/3. При бросании случайно выбранной кости выпала шес- тѐрка.

*Какова* вероятность того*,* что была выбрана фальшивая кость?

**Тема 3**

**Повторение опытов (схема Бернулли).**

*Пусть проводятся n независимых опытов (экспериментов), в каждом из которых событие* ***A*** *может наступить с вероятностью p. Обычно появление* ***A*** *называют успехом.*

*Обозначим через q = 1 - p – вероятность того, что событие* ***A*** *не наступа-*

*ет (неудача), и через*

*Bn*(*m*)

*– событие, заключающееся в том, что в серии из*

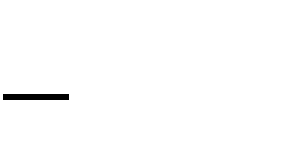
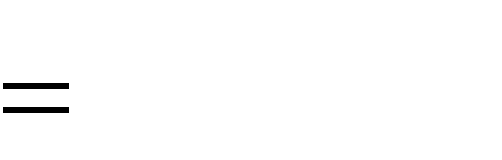
*п опытов ровно m опытов закончатся успешно (ровно m раз произойдет со- бытие* ***A****).*

*Тогда для любого m = 0, 1, . . . , n справедлива формула Бернулли* (*см. с. 23 учебного пособия*). *P( Bn*(*m*) *)=*

*Cm p mqn*-*m*,

*где C m*

*n n*



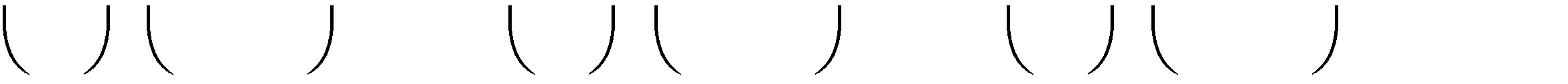
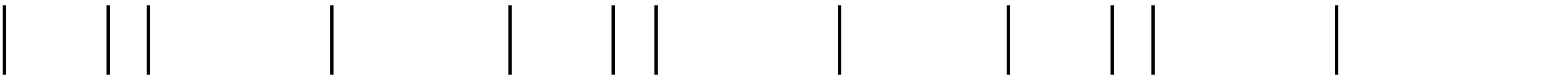
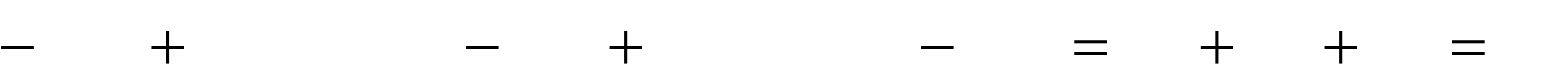
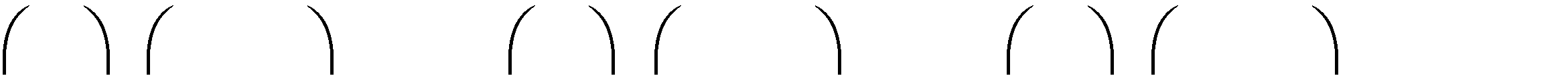
*n*! .

*m*!(*n m*)!

***Пример.*** *Пусть правильная монета подбрасывается 5 раз.*

*Какова вероятность, что появилось больше гербов, чем цифр?*

***Решение.*** *Здесь событие А – появление герба при одном подбрасывании монеты. P(A)=1/2 в любом из 5 опытов (подбрасываний), n=5, m – количество появившихся гербов. Пусть B – событие, состоящее в том, что гербов появи- лось больше, чем цифр. Событию B соответствуют значения m : 3, 4 и 5, от- куда по формуле Бернулли будем иметь*



1 3

1

2

1

2

2

*С*4

5

1

2

4 1 1

1

2

*С*5

5

1 5

2

1

1

2

0

10 5 1

32 32 32

1 .

2

*P(B)= С*3

5

***Задача 1.*** Производиться испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,1.

*Найти* вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при ис- пытании.

***Задача 2.*** Производиться 4 выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле 2/3.

*Найти* вероятность того, что в мишень попадут не менее 2 раз.

***Задача 3.*** Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца 0,2.

*Найти в*ероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не бо- лее половины микросхем.

***Задача 4.*** Накопитель снабжает деталями 8 станков с ЧПУ. В течение 20 минут от каждого станка может поступить заявка на деталь с вероятностью 1/5.

*Найти* вероятность того, что за 20 минут на накопитель поступит не более трех заявок.

***Задача 5***. В ралли участвует 10 однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них 1/20.

*Найти* вероятность того, что к финишу придут не менее 8 машин.

***Задача 6***. Имеется 7 партий деталей, каждая из которых содержит 10% бра- кованных. Из каждой партии извлекают по 1 детали.

*Найти* вероятность того, что среди извлеченных деталей не менее двух бракованных.

***Задача 7***. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объек- тами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть по- терян с вероятностью 0,2.

*Найти* вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет под- держиваться в течение всего времени.

***Задача 8.*** Прибор состоит из шести однотипных блоков, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее трех из них. За год работы каж- дый из блоков выходит из строя с вероятностью 0,3.

*Найти* вероятность того, что за год работы прибор не выйдет из строя.

***Задача 9***. В семье пять детей. Пусть вероятности появления на свет девоч- ки и мальчика полагаются равными.

*Найти* вероятность того, что в семье не более двух девочек.

***Задача 10***. Обрабатывающий центр снабжается заготовками от 10 одно- типных накопителей, выдающих при поступлении запроса по одной детали. Вероятность того, что на момент запроса в накопителе имеется заготовка, равна 0,9. Экономически достаточная загрузка центра обеспечивается одновремен- ным поступлением по запросам не менее трех деталей.

*Найти* вероятность того, что при очередном запросе будет обеспечена дос- таточная загрузка.

***Задача 11***. Вероятность поражения самолета средствами ПВО объекта 0,6

*Найти* вероятность того, что из 8 атакующих объект самолетов к нему про- рвется не более шести.

***Задача 12***. Транспортные средства оптовой базы обеспечивают за день вы- полнение не более трех заявок. База обслуживает 7 магазинов. Вероятность за- явки от каждого из них в течение дня равна 0,3.

*Найти* вероятность того, что все поступившие на базу в течение дня заявки будут выполнены.

***Задача 13***. Производиться испытание на " самовозгорание " пяти телевизо- ров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телеви- зоров перегревается и "самовозгорается" с вероятностью 0,1.

*Найти* вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

***Задача 14***. Из урны, содержащей 20% белых и 80% черных шаров, наудачу с последующим возвращением извлекают по одному шару.

*Найти* вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее че- тырех белых, если процедуру повторяют пять раз.

***Задача 15***. На участке пять одинаковых станков. Вероятность того, что в произвольный момент каждый из них свободен и готов к обработке поступив- шей детали равна 1/5. На участок для обработки поступают две детали.

*Найти* вероятность того, что хотя бы одна из них будет сразу же принята к обработке.

***Задача 16.*** Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно.

*Найти* вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов хотя бы три выйдут их него неповрежденными.

***Задача 17.*** Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подры- ва для каждого из судов считается равной 0,1.

*Найти* вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

***Задача 18***. Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания 0,2.

*Найти* вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

***Задача 19***. Обрабатывающий участок состоит из пяти однотипных станков.

Вероятность того, что станок исправен 0,8. Плановое задание может быть вы- полнено, если исправно не менее трех станков.

*Найти* вероятность того, что плановое задание не будет выполнено.

***Задача 20***. Предварительный анализ показал, что для поражения военного объекта противника необходим прорыв к нему 4 бомбардировщиков. Самолет поражается ПВО объекта с вероятностью 0,8. Атаку ведут 8 самолетов.

*Найти* вероятность того, что объект будет поражен.

***Задача 21***. Для разорения страховой фирмы необходимо, чтобы в течение года из 10 застрахованных судов хотя бы 5 затонули. Вероятность потерпеть аварию для каждого из судов 1/20.

*Найти* вероятность того, что страховая фирма в течение года не разориться.

***Задача 22***. Страховая фирма застраховала 5 однотипных самолетов, каж- дый на 1 млн. денежных единиц, страховой взнос за каждый самолет фирма по- лучила в размере 500 000 денежных единиц. Вероятность аварии самолета 0,01.

*Найти* вероятность того, что в течение страхового срока фирма будет иметь доход от этой операции.

***Задача 23.*** Данные о состоянии погоды в некотором регионе сообщают 7 автоматических метеостанций. Для получения уверенной информации для про- гноза необходима исправная работа, по крайней мере, пяти из них. В течение года каждая из станций выходит из строя с вероятностью 0,1.

*Найти* вероятность того, что в течение года центр обработки наблюдений будет получать достаточную для уверенного прогноза информацию.

***Задача 24***. На ВЦ от каждого из 10 отделов предприятия в течение рабоче- го дня с вероятностью 0,2 может поступить заявка на выполнение однотипных расчетов. Расчеты ведутся в ночное время, причем до начала рабочего дня мо- жет быть выполнено не более 5 заказов.

*Найти* вероятность того, что не все поступившие на ВЦ заказы будут вы- полнены.

***Задача 25***. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,6. Для получения зачета достаточно, по крайней мере, трех попаданий.

*Найти* вероятность получить зачет по стрельбе, если делается 5 выстрелов.

***Задача 26***. Контроллер ОТК проверяет 4 изделия на стандартность. Веро- ятность того, что изделие стандартно, равна 0,8 для каждого изделия.

*Найти* вероятность того, что более половины проверенных изделий стан- дартно.

***Задача 27***. Девочка, имеющая 6 колец, бросает их на колышек по одному.

Вероятность попадания при каждом броске равна 0,3.

*Найти* вероятность того, что не менее 4 колец попадут на колышек.

***Задача 28***. Производиться испытание 4 изделий на надежность. Вероят- ность выдержать испытание для каждого изделия 0,7.

*Найти* вероятность того, что испытание выдержат хотя бы два изделия.

***Задача 29***. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производиться 7 независимых выстрелов. Для разрушения цели необходимо, по крайней мере, четыре попадания.

*Найти* вероятность разрушения цели.

***Задача 30***. Устройство состоит из 5 независимо работающих элементов.

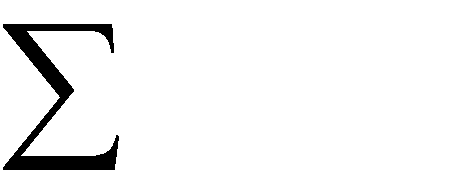
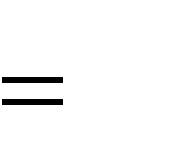
Вероятность отказа каждого элемента за год работы равна 0,15.

*Найти* вероятность того, что за год работы откажут менее трех элементов.

**Тема 4**

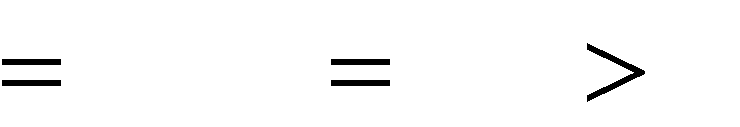
**Дискретные случайные величины**

*Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений*: *x1, x2,…. Значение xk прини-*



*pk* 1.

*k*

*мается с некоторой вероятностью pk P*( *X xk* ) 0 *. При этом*

*Соответствие, которое каждому значению xk*

*дискретной случайной вели-*

*чины X сопоставляет его вероятность случайной величины X.*

*pk , называется законом распределения*

*Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется*

*рядом распределения*:

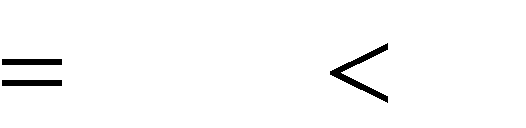
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | *x1* | *x2* | ***. . .*** |
| *P* | *p1* | *p2* | ***. . .*** |

*Функция распределения случайной величины*

*F* (*x*)

*в дискретном*

*случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле*

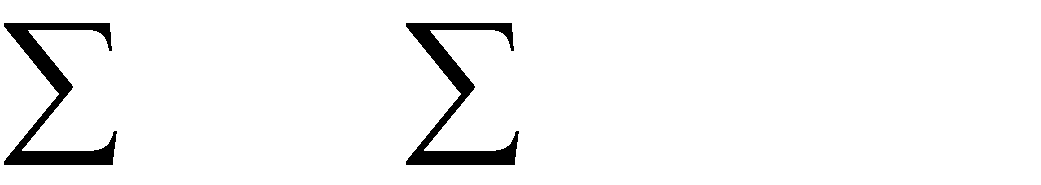
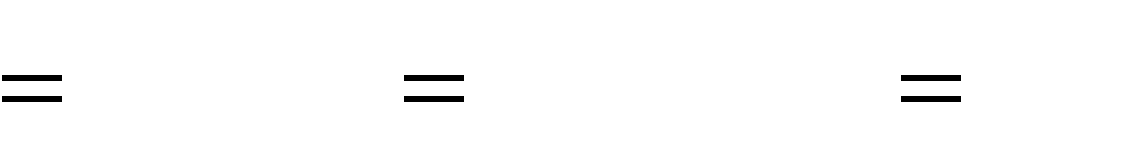
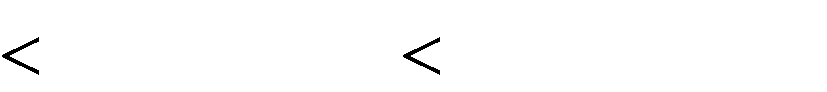


*P*( *X x*)

*F* (*x*)

*pk*

*xk x xk*

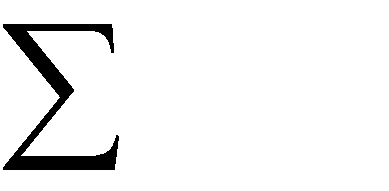
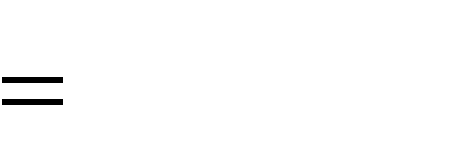


*P*(*X xk* ) *.*

*x*

*Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной*

*величины X называется число: E*(*X* )

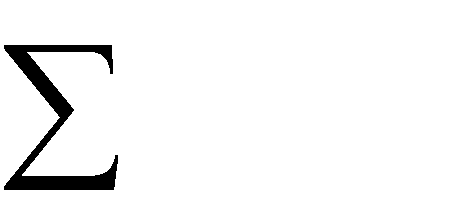
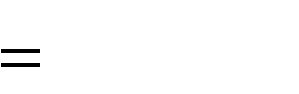
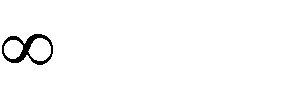


*k*

*xk pk* .

*Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят*

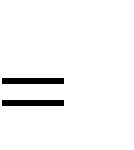
*что математическое ожидание существует, если ряд сходится, при*

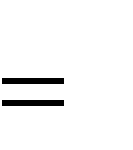


*k* 1

| *xk* | *pk*

*расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.*

*Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:*

*D(X)*

*M(X*

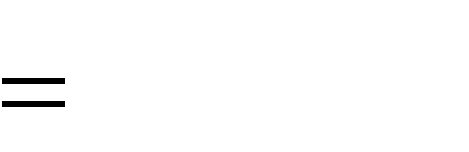
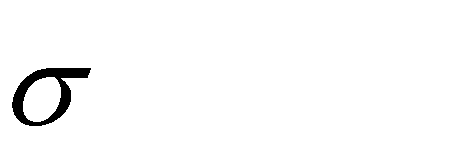
*- M(X))2 .*

*Дисперсию удобно вычислять по формуле*

*D(X)*

*M(X 2 ) - (M(X))2 .*

*Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квад- ратный корень из дисперсии:*



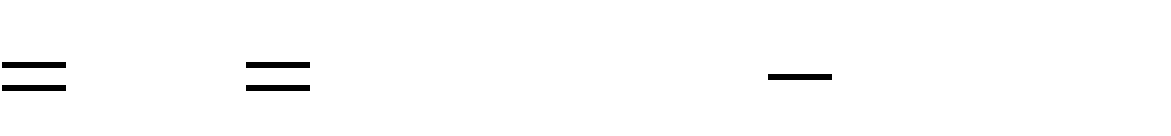
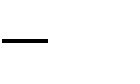
(*X* )

*D*(*X* ).

*Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рас- сеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания* (*см. с. 27-30, 32-36 учебного пособия*).

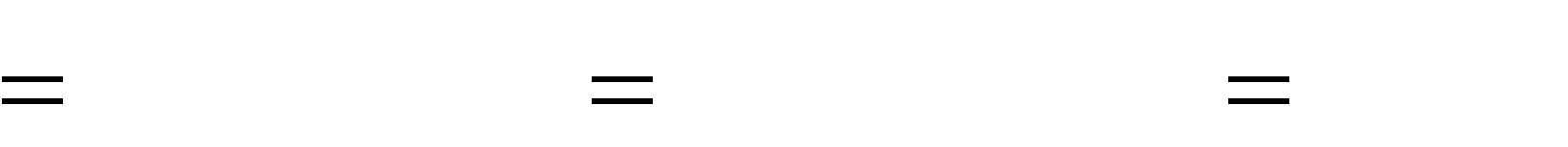
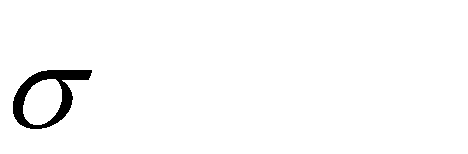
*В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распре- деление случайной величины X – числа наступления события A в п независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вертятностью p. Случайная величина X принимает целочисленные значения*

*m= 0, 1, …, n с вероятностями P*( *X m*) *C m pm*(1 *p*)*n m .*



*n*

*Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по*



*np*, *D*(*X* ) *npq*,

(*X* ) *npq*

*формулам*

*E*(*X* )

*, где q=1- p.*

*Для всех вариантов расшифровка задания: ” Построить\* … отклонение… ” читается так: ” Построить ряд распределения, найти функцию распределе- ния, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение…”.*

***Задача 1.*** Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью *p* = 0,9. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований.

*Построить\*…*отклонение числа препятствий, преодолѐнных спортсме- ном.

*Найти* вероятность того, что спортсмен преодолеет: а) не более двух препятствий;

б) более трѐх препятствий.

***Задача 2***. Из коробки, в которой находятся 2 зелѐных, 2 чѐрных и 6 крас- ных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня.

*Построить\*…* отклонение числа извлечѐнных стержней красного цвета.

*Найти* вероятность того, что при этом красных стержней будет: а) не менее трѐх

б) хотя бы один.

***Задача 3.*** База снабжает 6 магазинов. От каждого из них может поступить заявка на данный день с вероятностью 1/3.

*Построить\*…* отклонение числа заявок на базу на данный день.

*Найти* вероятность того, что их будет более пяти.

***Задача 4.*** Наблюдение за районом осуществляется тремя радиолокацион- ными станциями. В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0,2.

*Построить\*…* отклонение числа радиостанций, обнаруживших объект.

*Найти* вероятность того, что их будет не менее двух.

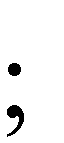
***Задача 5.*** Опыт состоит из четырѐх независимых подбрасываний двух пра- вильных монет, т.е. выпадение герба и цифры равновозможные события.

*Построить\*…* отклонение числа одновременного выпадения двух цифр.

*Найти* вероятность того, что это событие произойдѐт не менее трѐх раз.

***Задача 6***. Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемо- го манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останав- ливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3.

*Построить\*…* отклонение числа манипуляторов, проверенных до останов- ки линии.

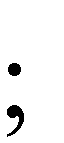
*Найти* вероятность того, что до остановки линии будет проверено: а) не более двух манипуляторов

б) более трѐх манипуляторов.

***Задача 7***. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Две из карточек вынимаются наугад одновременно.

*Построить\*…* отклонение суммы чисел, записанных на этих карточках.

*Найти* вероятность того, что эта сумма будет:

а) менее шести б) не менее пяти.

***Задача 8***. Производятся 4 независимых опыта, в каждом из которых с вероят- ностью 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 соответственно может появиться случайное событие *A*.

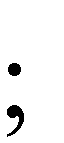
*Построить\*…* отклонение числа появлений события *А.*

*Найти* вероятность того, что *А* произойдѐт не менее чем в половине опытов.

***Задача 9***. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша.

*Построить\*…* отклонение числа красных карандашей в выборке.

*Найти* вероятность того, что в выборке будет:

а) хотя бы один красный карандаш б) менее двух красных карандашей.

***Задача 10***. Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок на- чинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстре- ле 0,8.

*Построить\*…* отклонение числа поражѐнных мишеней.

*Найти* вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень.

***Задача 11.*** Из ящика, содержащего 4 годных и 3 бракованных детали, нау- гад извлекают 4 детали.

*Построить\**… отклонение числа вынутых годных деталей.

*Найти* вероятность того, что годных деталей будет: а) менее трех;

б) хотя бы одна.

***Задача 12.*** Имеется набор из четырех карточек, на каждой из которых на- писана одна из цифр 1, 2, 3, 4. Из набора наугад извлекают карточку, затем ее возвращают обратно, после чего наудачу извлекают вторую карточку.

*Построить\**… отклонение случайной величины, равной сумме чисел, на- писанных на вынутых карточках.

*Найти* вероятность того, что эта сумма:

а) не превзойдет числа 4; б) будет не менее 6.

***Задача 13.*** Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероят- ность попадания каждым стрелком в цель равна 0.6.

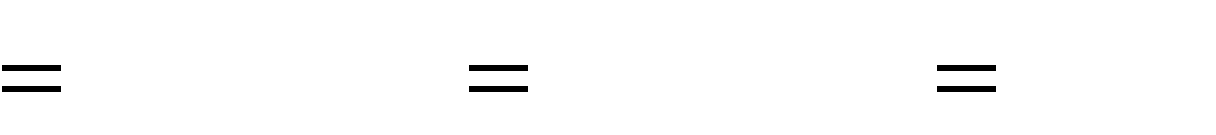
*Построить\*…* отклонение числа попаданий, если каждый стрелок делает только один выстрел.

*Найти* вероятность того, что:

а) будет хотя бы одно попадание;

б) будет не более одного попадания.

***Задача 14.*** Три стрелка независимо друг от друга стреляют каждый по сво- ей мишени один раз. Вероятности попадания при одном выстреле у стрелков



0,3; *p*2

0,6; *p*3

0,7.

равны соответственно: *p*1

*Построить\*…* отклонение числа пораженных мишеней. *Найти* вероятность того, что пораженных мишеней будет: а) хотя бы одна;

б) менее двух.

***Задача 15.*** Опыт состоит из трех независимых подбрасываний одновре- менно трех монет, каждая из которых с одинаковой вероятностью падает гер- бом или цифрой вверх.

*Построить\*…* отклонение числа одновременного выпадения двух гербов.

*Найти* вероятность того, что два герба одновременно выпадут хотя бы один раз.

***Задача 16.*** На пути автомобиля 5 светофоров, каждый из них автомобиль проезжает с вероятностью 0,6.

*Построить\**… отклонение числа светофоров, которые автомобиль проез- жает до первой остановки.

*Найти* вероятность того, что до первой остановки автомобиль проедет:

а) хотя бы один светофор; б) более трех светофоров.

***Задача 17.*** Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 3 черных шара и один белый. После перемешивания из последней урны вынимают 3 шара.

*Построить\**… отклонение числа черных шаров, вынутых из второй урны.

*Найти* вероятность того, что из нее будет извлечено: а) по крайней мере, два шара;

б) не более двух шаров.

***Задача 18.*** Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

*Построить\**… отклонение числа выстрелов, произведенных стрелком, ес- ли у стрелка имеется 5 патронов.

*Найти* вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

***Задача 19.*** Ракетная установка обстреливает две удаленные цели. Вероят- ность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Цель при попадании в нее уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожения обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет.

*Построить\*…* отклонение числа запущенных ракет. *Найти* вероятность того, что при этом будет запущено: а) не более трех ракет;

б) от двух до четырех ракет.

***Задача 20.*** Три ракетные установки стреляют каждая по своей цели незави- симо друг от друга до первого попадания, затем прекращают стрельбу. Каждая ракетная установка имеет две ракеты. Вероятность попадания одной ракеты для первой установки – 0,4, для второй – 0,5, для третьей – 0,6.

*Построить\*…* отклонение числа ракетных установок, у которых осталась неизрасходованная ракета.

*Найти* вероятность того, что будет хотя бы одна такая установка.

***Задача 21.*** Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в ми- шень при одном выстреле равна 0,9 для одного из орудий и 0,6 для каждого из двух других. Наугад выбирают два орудия, и каждое из них стреляет один раз.

*Построить\*…* отклонение числа попаданий в мишень.

*Найти* вероятность:

а) хотя бы одного попадания в мишень; б) хотя бы одного непопадания в мишень.

***Задача 22.*** Группа состоит из пяти отличных, пяти хороших и десяти по- средственных студентов. Вероятность правильного ответа на один вопрос экза- менационной программы равна 0,9 для отличного студента, 0,7 для хорошего студента и 0,6 для посредственного студента.

*Построить\*…* отклонение числа правильных ответов на два вопроса нау- гад выбранного билета одним случайно выбранным студентом данной группы.

*Найти* вероятность того, что правильным будет ответ хотя бы на один во- прос.

***Задача 23.*** С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов.

*Построить\*…* отклонение числа промахов.

*Найти* вероятность того, что промахов будет:

а) менее двух;

б) не менее трех.

***Задача 24.*** Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероят- ность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8 для четвертого – 0,9.

*Построить\*…* отклонение числа станков, которые потребуют внимания рабочего.

*Найти* вероятность того, что таких станков будет не более половины.

***Задача 25***. Монету подбрасывают 6 раз.

*Построить\*…* отклонение разности числа появлений герба и числа появ- лений цифры.

*Найти* вероятность того, что эта разность будет менее двух.

***Задача 26.*** В кошельке лежат 5 монет по 1 руб., две монеты по 2 руб. и три монеты по 5 руб.

*Построить\*…* отклонение числа рублей, извлеченных из кошелька, если из него извлекают наугад две монеты.

*Найти* вероятность того, что извлеченных рублей будет: а) не менее четырех;

б) более семи.

***Задача 27***. Производится по два последовательных выстрела по каждой из трех целей. Вероятность попадания при одном выстреле в любую цель равна 0,7. При попадании в цель стрельба по ней прекращается, неизрасходованный патрон при стрельбе по другим целям не используется.

*Построить\*…* отклонение числа пораженных целей.

*Найти* вероятность того, что будет поражено хотя бы две цели.

***Задача 28.*** Для контроля трех партий деталей выбирается случайным обра- зом любая партия, и из нее берут наугад две детали.

*Построить\*…* отклонение числа бракованных деталей, среди этих двух, если в первой партии 2/3 недоброкачественных деталей, во второй 1/3 и в третьей бракованных деталей нет.

*Найти* вероятность того, что среди этих двух деталей будет хотя бы одна доброкачественная.

***Задача 29.*** Имеются два одинаковых ящика с деталями. В первом ящике содержатся 8 деталей, из них 3 бракованных, во втором – 4 детали, из них – 2 бракованных. Из одного ящика вынимают 3 детали.

*Построить\**… отклонение числа бракованных деталей среди трех выну- тых, если выбор ящиков равновероятен.

*Найти* вероятность того, что будет вынуто не более двух бракованных де- талей.

***Задача 30.*** Два студента сдают экзамен, отвечая на два вопроса программы, независимо друг от друга. Вероятность правильного ответа на любой вопрос программы для первого студента – 0,6, для второго – 0,8. При неправильном ответе на вопрос экзамен прекращается.

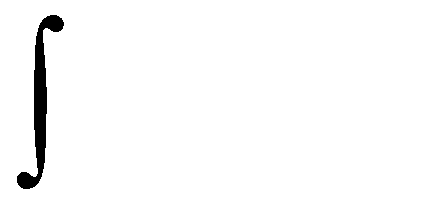
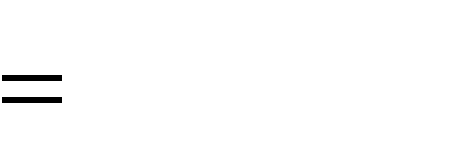
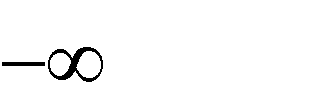
*Построить\*…* отклонение числа студентов, пытавшихся ответить на оба вопроса.

*Найти* вероятность того, что будет хотя бы один такой студент.

**Тема 5**

**Непрерывные случайные величины**

*Случайная величина X называется непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция f (x) такая, что при любом x выполне- но соотношение*

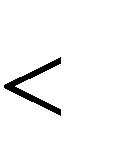
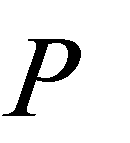


*f* (*t*) *dt*

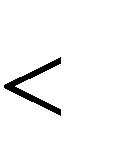
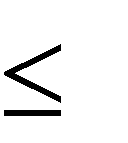
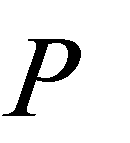
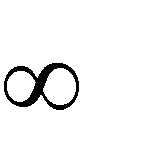
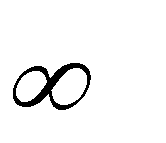
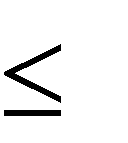
*F*(*x*)

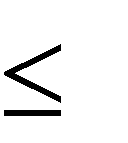
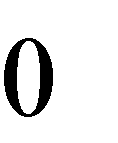
*x*

, (1)

*где, как и раньше, F(x)* = (*X x*) *– функция распределения случайной величины*

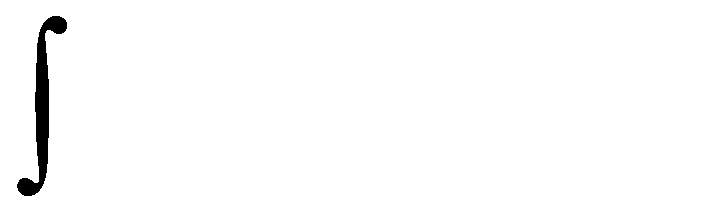
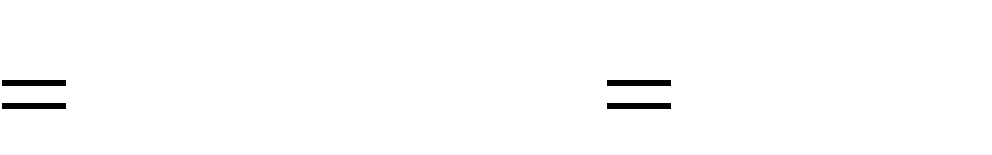
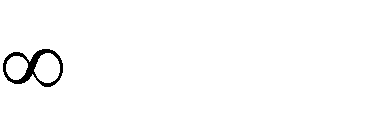
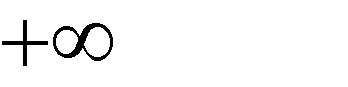
*X. Функция f (x) называется плотностью распределения (или плотностью рас- пределения вероятностей) случайной величины X* (*см. с. 31-32, 34-41 учебного пособия*)*.*

*Из* (1) *следует, что F*(*x*) *является непрерывной функцией. Напомним, что, кроме того, функция распределения является неубывающей функцией и*



*F* (*x*) 1; *F* (*-* ) = 0; *F* (+ ) =1; (*a X b*) = *F* ( *b*) *-- F* ( *a*).

*Плотность распределения обладает следующими свойствами*



*f* (*x*)*dx* 1,

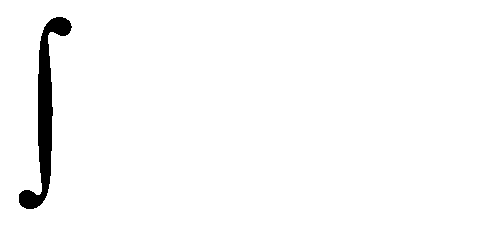
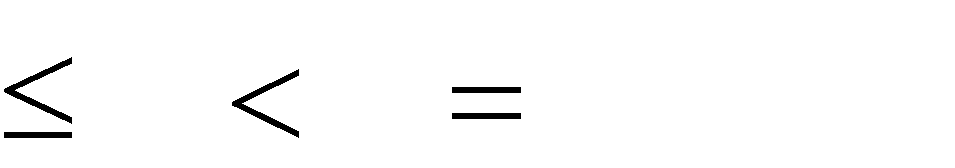
*f* (*x*) *F* '(*x*)

-

, *если производная F΄*(*x*) *существует*

*и вероятность попасть на промежуток можно найти, интегрируя плотность распределения* (*это свойство и свойство* (1) *эквивалентны*)

*b*



*X b*)

*f* (*x*)*dx*.

*a*

*P*(*a*

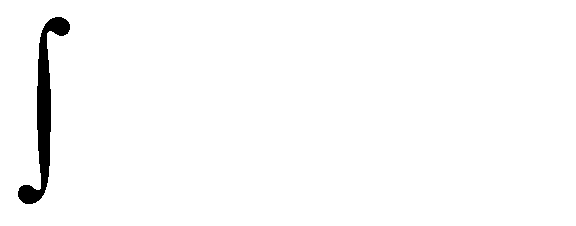
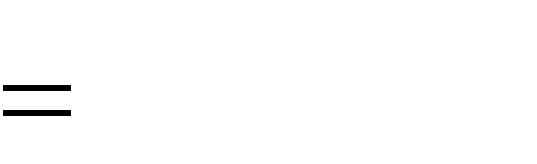
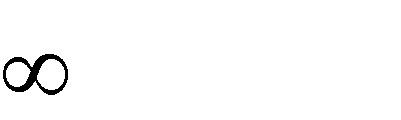
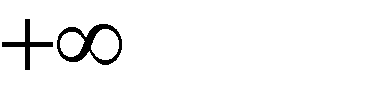
*Математическое ожидание (среднее) непрерывной случайной величины X оп-*

*ределяется равенством*

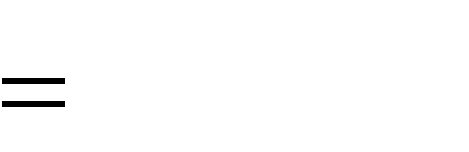
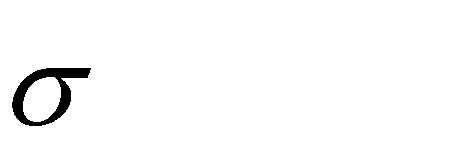
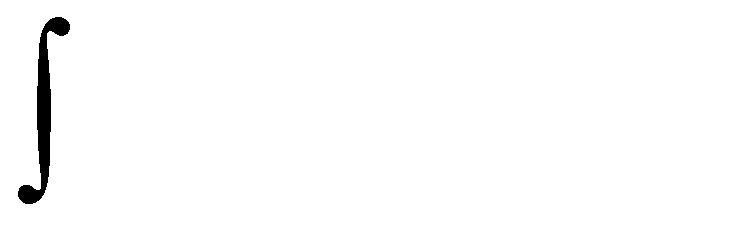
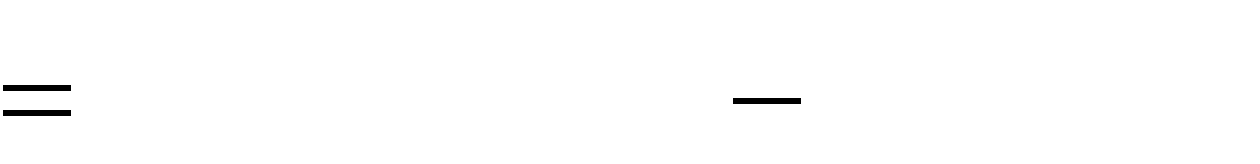
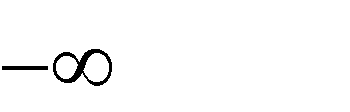
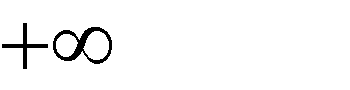
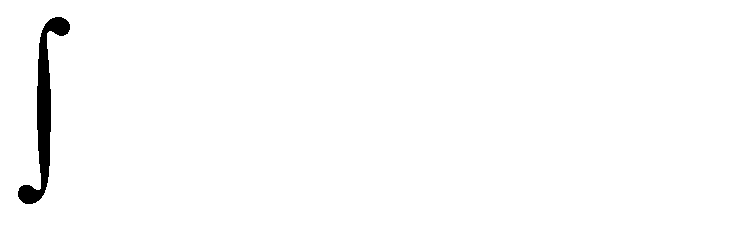
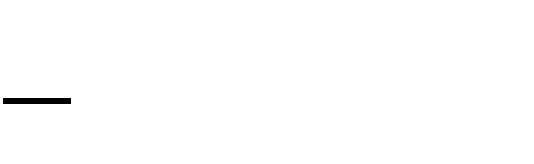
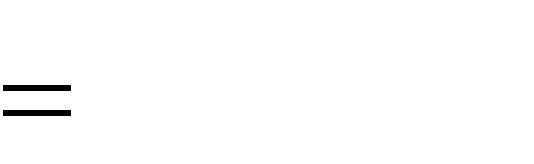
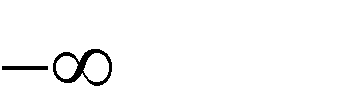
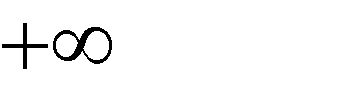
*E*(*X* )

*x f* (*x*)*dx* . *Дисперсия непрерывной слу-*

-



*чайной величины X определяется равенством*



*D*(*X* )

(*x E*(*x*))2 *f* (*x*)*dx*

*или*

*D*(*X* )

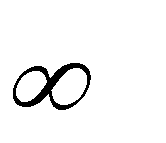
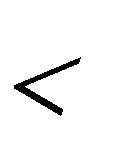
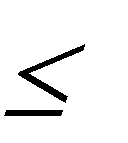
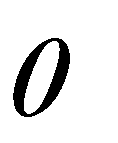
*x*2 *f* (*x*)*dx*

(*E*(*X* ))2*,*

*среднее квадратичное отклонение Х равенством* (*X* ) *D*(*X* ) *.*

***Задача 1***. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

*f (x) = a x 2 e - k x* , где *k > 0 x*



*.*

*Найти*: а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения случайной величины *X*;

в) вычислить вероятность попадания случайной величины *X* на

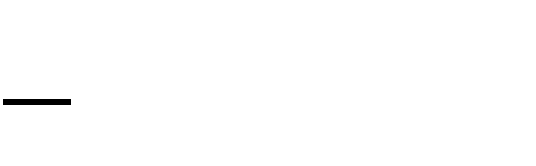
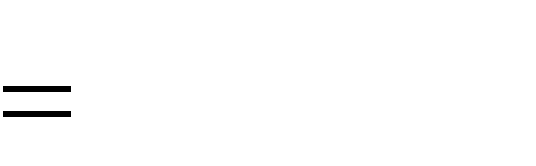
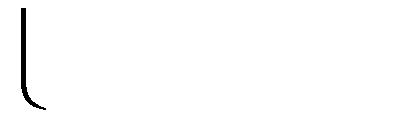
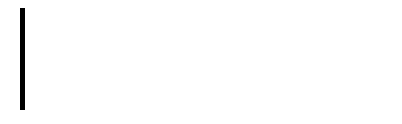
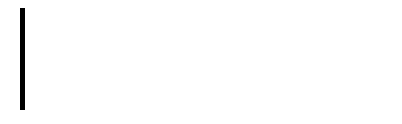
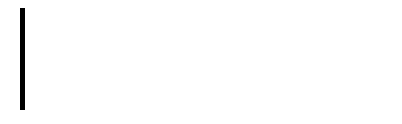
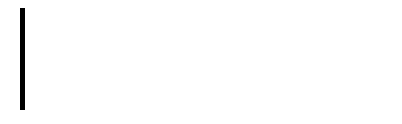
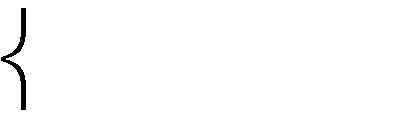
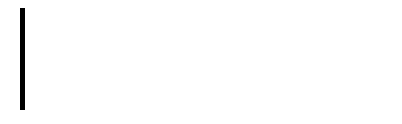
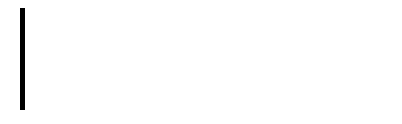
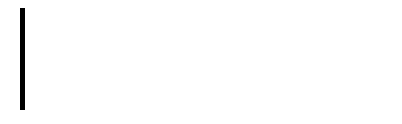
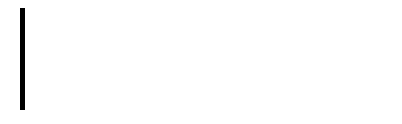
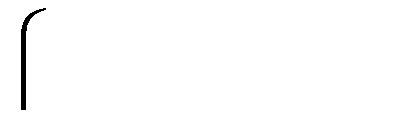
интервал (0 1/ *k* ).

***Задача 2.*** Случайная величина *X* имеет функцию распределения

*F* (*x*)

при *x*

при 0



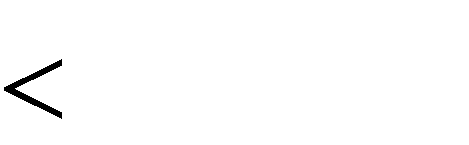
0,

16

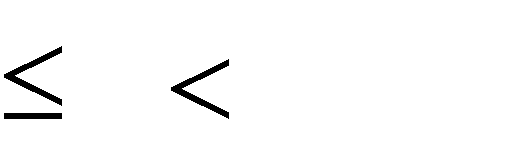
*x* 2 ,

*x* 7 / 4,

1,

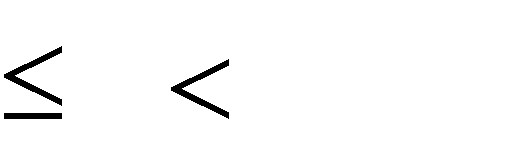


0;



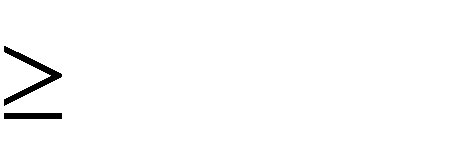
*x* 2;

при 2

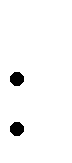


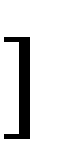
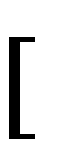
*x* 11/ 4;

при *x*



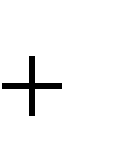
11/ 4.

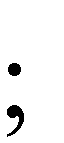
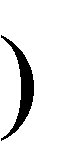
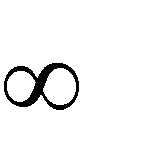
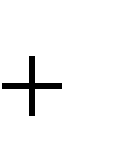
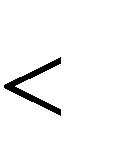
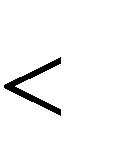
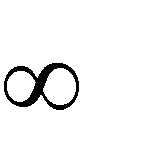
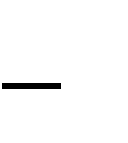
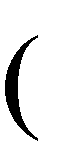
*Найти* а) плотность распределения *f* (*x*), построить графики *F* (*x*) и *f* (*x*) б) математическое ожидание *E*(*X*) и дисперсию *D*(*X*);



1 1 5

в) вероятность попадания случайной величины *X* на отрезок

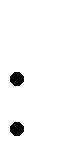
***Задача 3.*** Функция распределения непрерывной случайной величины име- ет вид

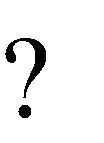


*x*

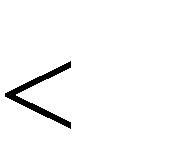
*A B*

*F* (*x*) = *A B* arctg *x*

*Найти* а) постоянные

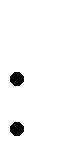
б) плотность распределения *f* (*x*), построить графики *F* (*x*) и *f* (*x*); в) выяснить существует ли *E*(*X*)

***Задача 4.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид



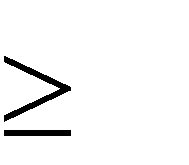
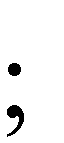
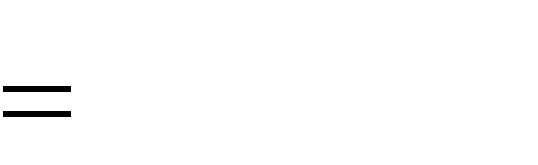
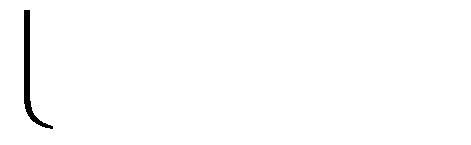
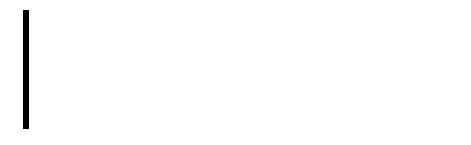
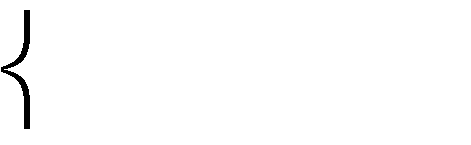
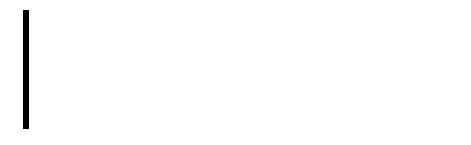
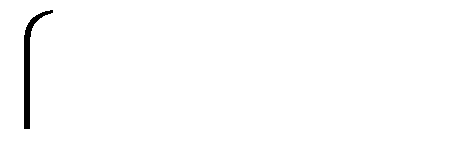
1;

*f* (*x*)

*Найти* а) коэффициент *A*

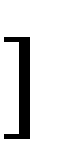
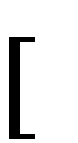
0, при *x*

*A* , при *x x*2



1.

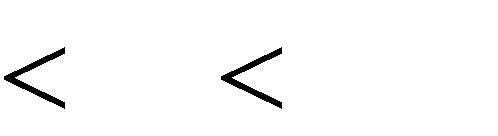
б) функцию распределения *F* (*x*), построить графики *F* (*x*) и *f* (*x*); в) математическое ожидание *E*(*X*) и дисперсию *D*(*X*);

г) вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (2 ; 3); д) вероятность того, что при 4 независимых испытаниях случайная величина *X* ни разу не попадает на отрезок 2; 3 .

***Задача 5.*** График плотности распределения случайной величины *X* пред- ставляет собой полуэллипс с большей полуосью “*a*” (*a* - известно).

## *Найти*

а) полуось *b*;

б) аналитическое задание *f* (*x*); в) моменты *E* (*X*), *D*(*X*);

г) вероятность

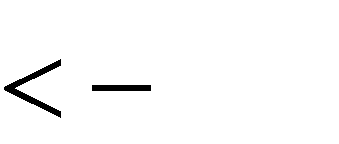
*P*(*a* / 2 *X*

2*a*) .

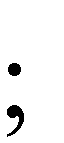
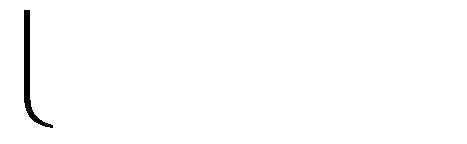
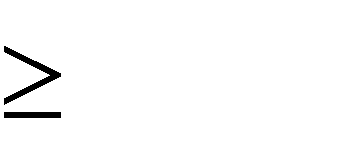
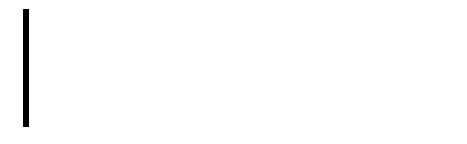
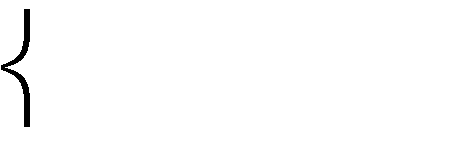
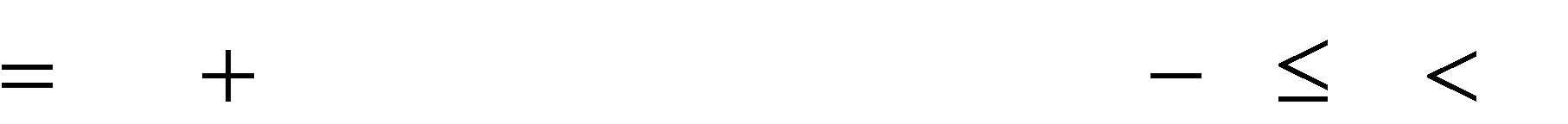
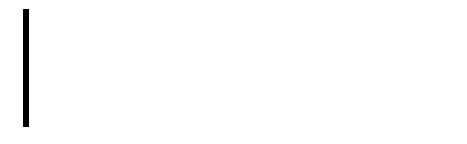
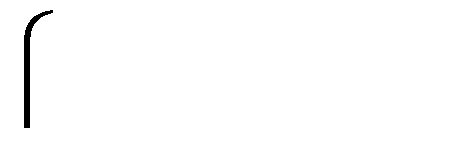
***Задача 6.*** Функция распределения непрерывной случайной величины *X*

имеет вид

0, при *x*



1;

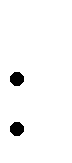


*F* (*x*)

*a b* arcsin *x*, при 1

*x* 1;

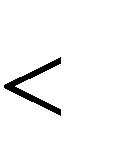
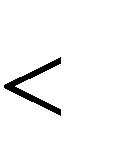
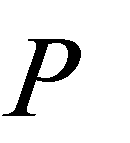
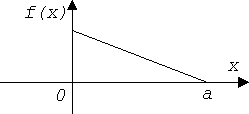
1, при

*Найти* а) коэффициенты *а* и *b*

*x* 1.

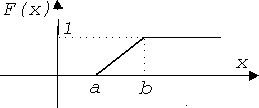
б) математическое ожидание *E*(*X*) и дисперсию *D*(*X*).

***Задача 7.*** Случайная величина *X* распределена по закону “прямоугольного треугольника” в интервале (0; *a*).

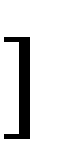
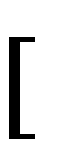
*Найти:* а) аналитическое задание *f* (*x*); б) функцию распределения *F* (*x*); в) вероятность (*a*/2 *X a*);

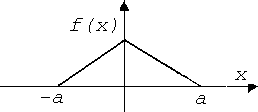
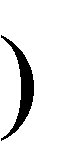
г) моменты *E*(*X*), *D*(*X*).

***Задача 8.*** Функция распределения случайной величины *X* задана графиком



*Найти* математическое ожидание *E*(*X*) и дисперсию *D*(*X*).

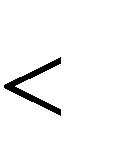
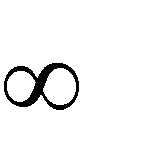
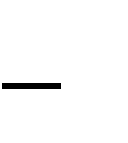
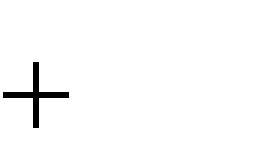
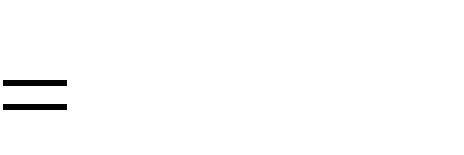
***Задача 9.*** Случайная величина *X* подчинена “закону равнобедренного тре- угольника” на участке - *a*; *a* .

*Найти:* а аналитическое задание *f* (*x*);

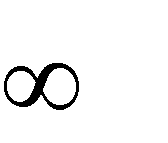
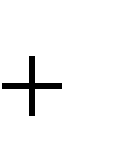
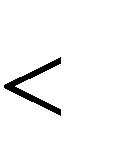
б) математическое ожидание *E*(*X*), дисперсию *D*(*X*)*.*

***Задача 10.*** Случайная величина распределена по закону Коши

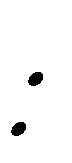
*f* (*x*)  *a* , при

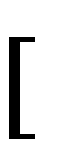


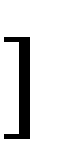
*x*



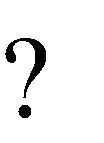
1 *x*2

*Найти*а) коэффициент *a*;

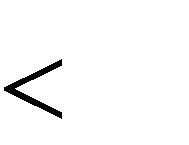
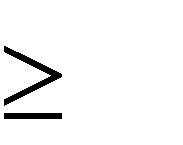
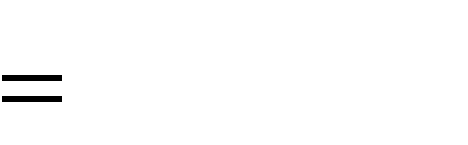
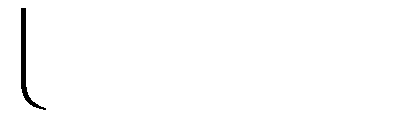
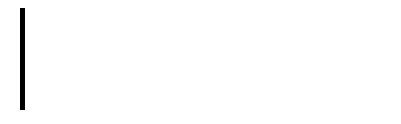
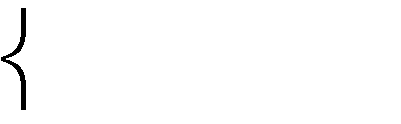
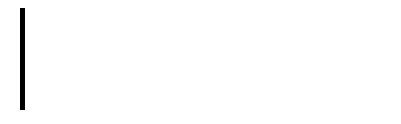
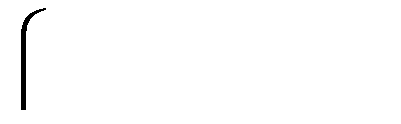
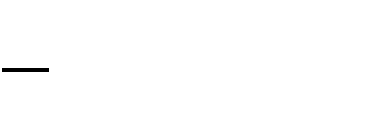
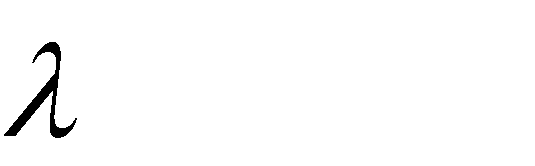
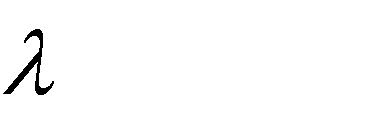
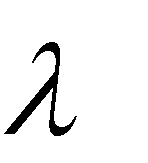
б) функцию распределения *F* (*x*);



1

в) вероятность попадания случайной величины *X* на отрезок -1 г) выяснить существует ли *E*(*X*)

***Задача 11.*** Случайная величина *X* подчинена показательному закону рас- пределения с параметром *>*0



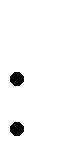
0;

0.

*f* (*x*)

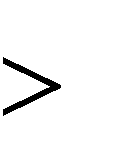
*e x*, при *x*

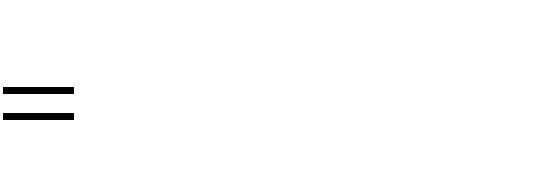
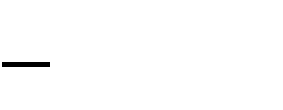
0, при *x*

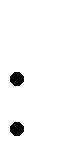
*Найти* а) функцию распределения *F* (*x*);

б) вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее, чем еѐ математическое ожидание.

***Задача 12.*** Случайная величина *X* подчинена закону Лапласа

*f* (*x*) *ae* |*x*| /*u ,* где *u* 0.

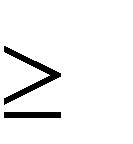
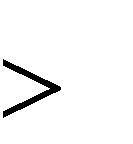


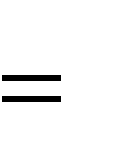
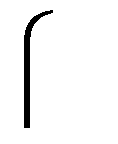
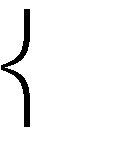
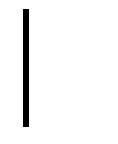
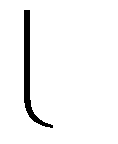
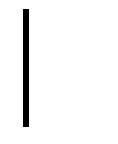
*Найти* а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

***Задача 13.*** Функция распределения случайной величины *X* имеет вид

*x* 3



*F (x)*

1 *- 0* ,

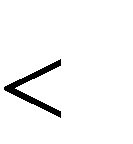
*x*3

0*,*

при

при

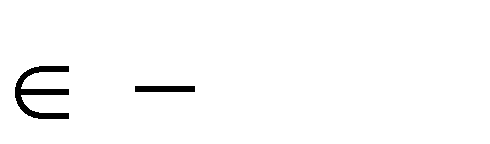
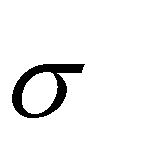
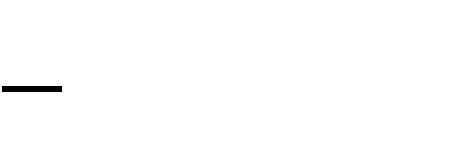
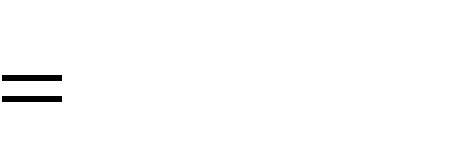
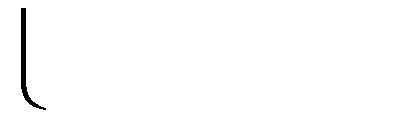
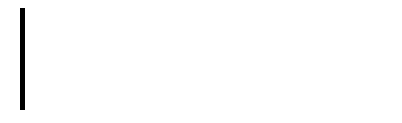
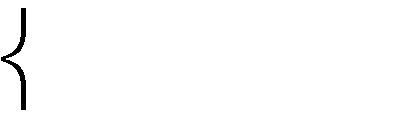
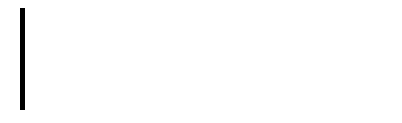
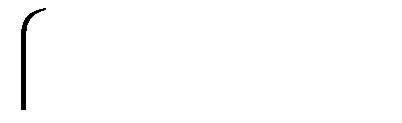
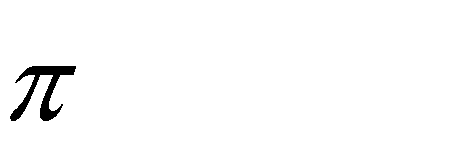
*x x*0 0;

*x x0* .

*Найти* математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

***Задача 14.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

1 , при *x*

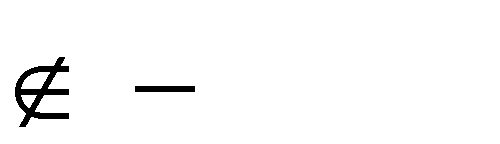


( *a*, *a*);

*f* (*x*)

*a*2 *x*2

0, при *x*

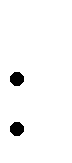


( *a*, *a*).

*Найти* моменты *E(X*), *D*(*X*), (*X*) и вероятность *P*(*0 < X < 2a*).

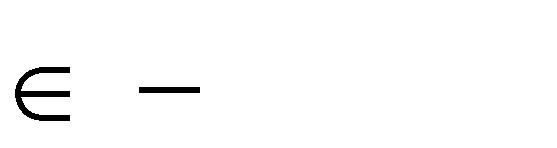
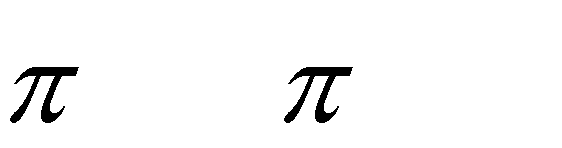
***Задача 15.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*f* (*x*)

*Найти* а) коэффициент *a*;

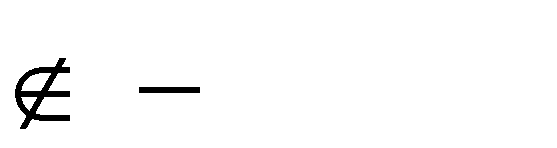
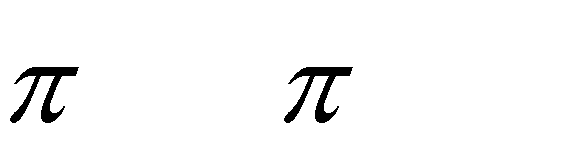
при *x*

при *x*



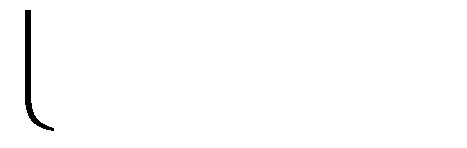
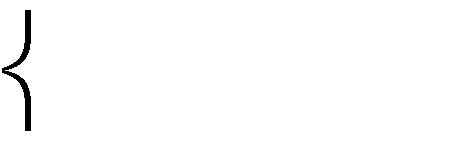
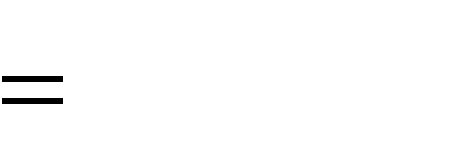
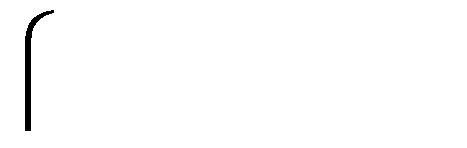
(

/ 2, / 2);



(

/ 2, / 2).



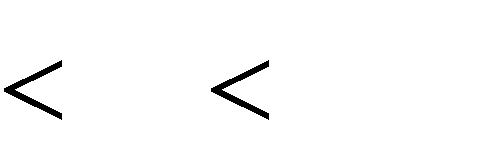
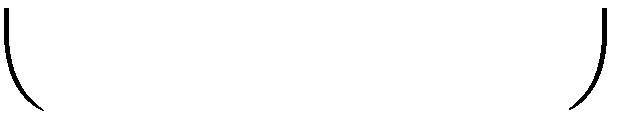
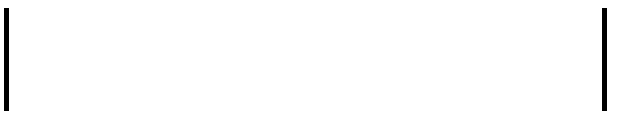
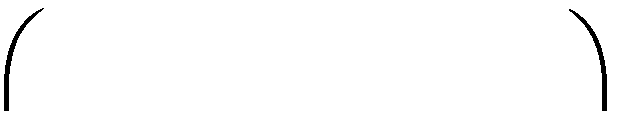
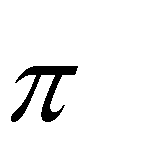
*a* cos *x*,

0,

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*);

г) вероятность *P* .



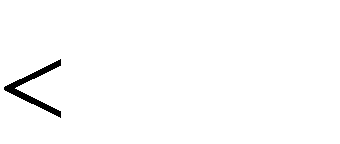
0 *X*

3

4

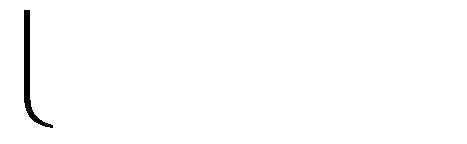
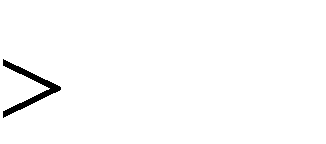
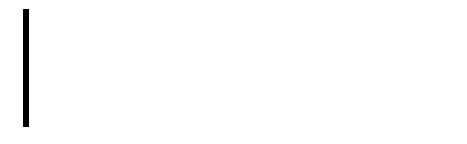
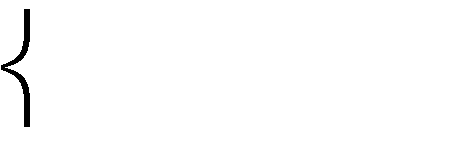
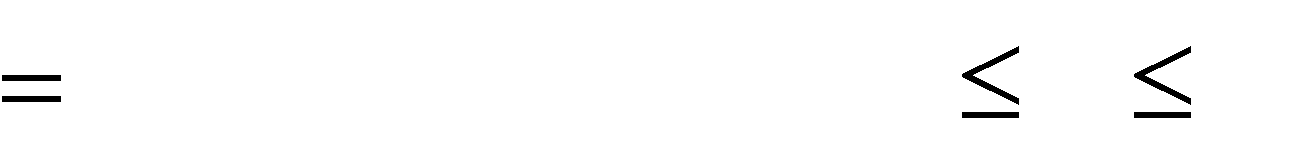
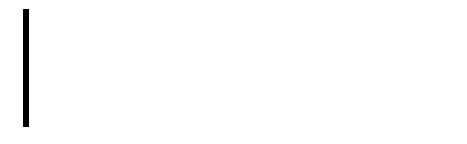
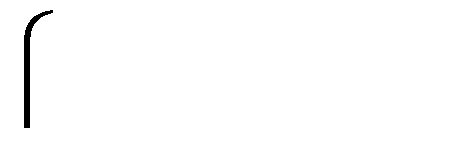
***Задача 16.*** Функция распределения непрерывной случайной величины *X*

имеет вид



0;

*F* (*x*)



*A*,

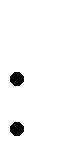
*B x*,

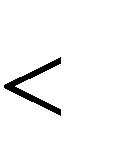
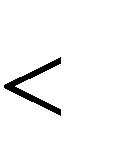
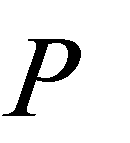
*C*,

при *x*

при 0 *x* 1;

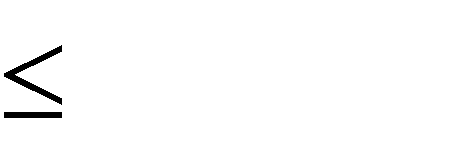
при *x* 1.

*Найти* а) коэффициенты *A, B, C*;

б) плотность распределения *f* (*x*); в) вероятность (0 *X* 1/2);

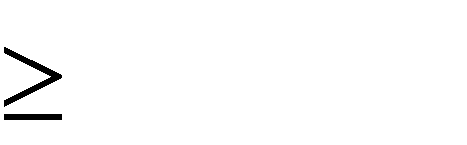
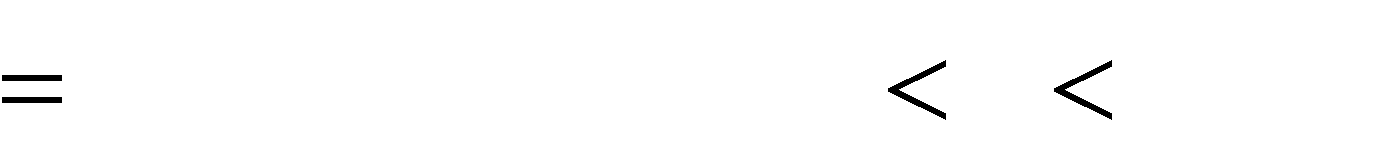
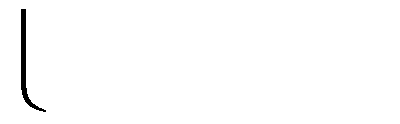
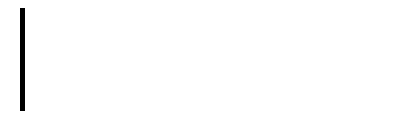
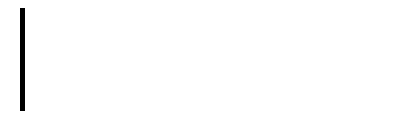
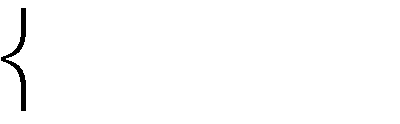
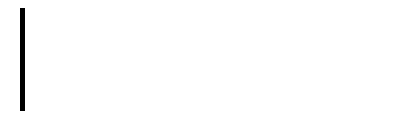
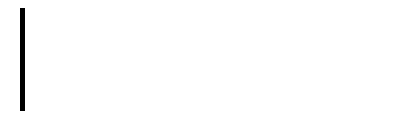
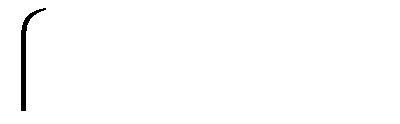
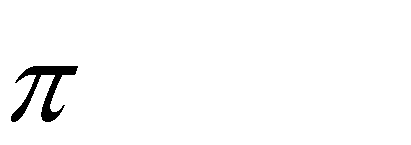
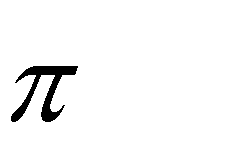
г) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*);

***Задача 17.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид



0;

*f* (*x*)



0,

*A*

cos 2 *x*

0,

при

при при

*x*

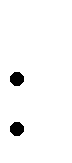
0

*x*

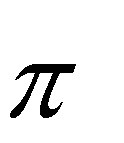
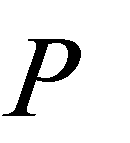
*x*

/ 4;

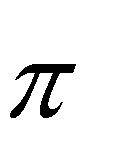
/ 4.

*Найти* а) коэффициент *A*;

б) функцию распределения *F* (*x*); в) математическое ожидание *E* (*X*);



( */*



*/*

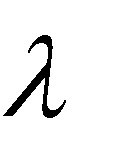
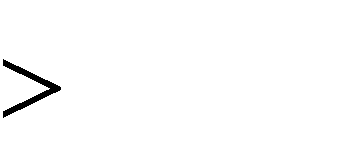
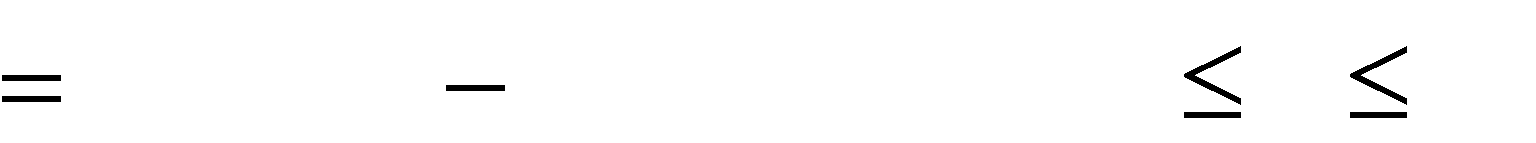
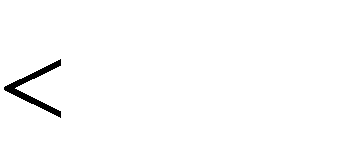
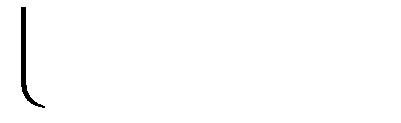
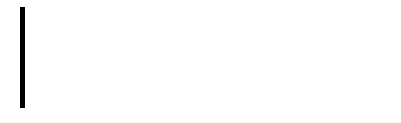
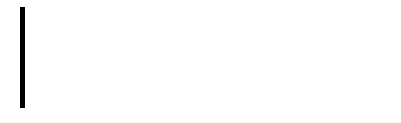
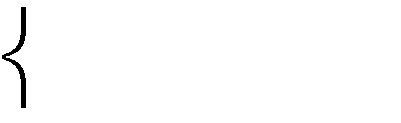
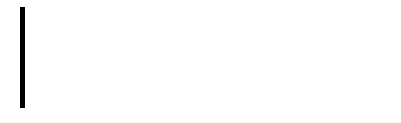
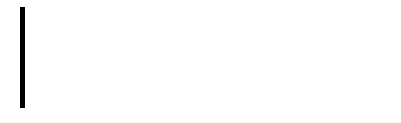
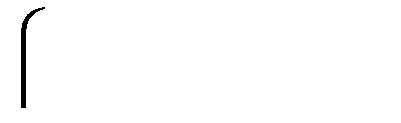
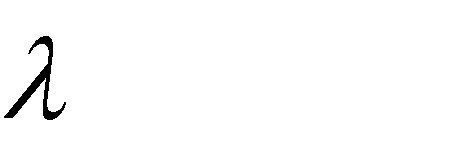
г) вероятность

***Задача 18.*** Дана функция

8 < *X <*

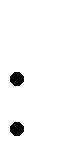
4).

0, при *x* 0;



*f* (*x*) (3*x x*2), при 0 *x* 3;

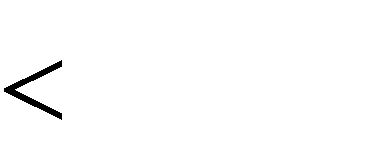
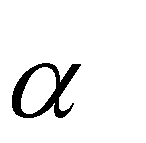
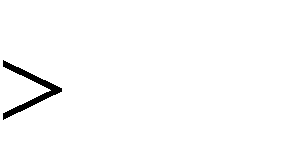
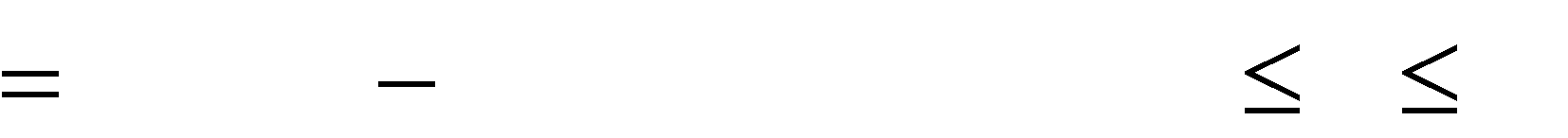
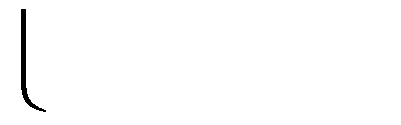
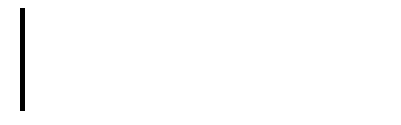
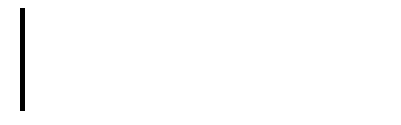
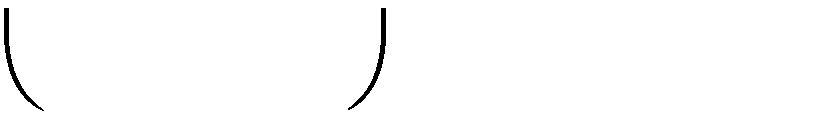
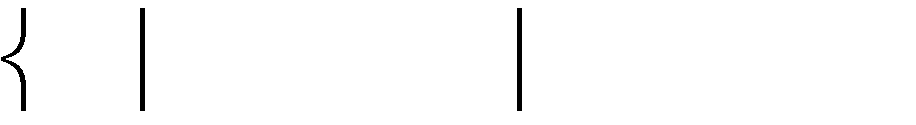
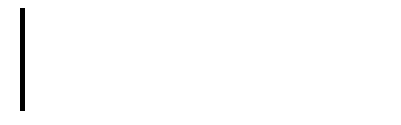
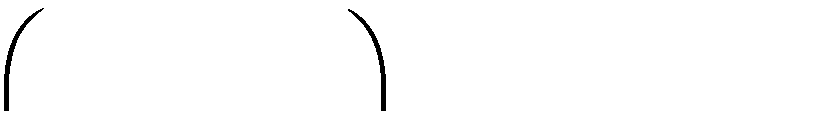
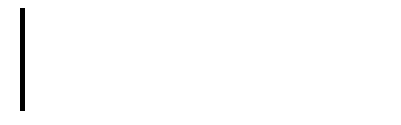
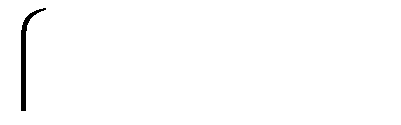
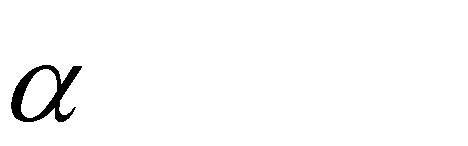
0, при *x* 3.

*Найти* а) при каком функция *f* (*x*) является плотностью распре- деления некоторой случайной величины *X*;

б) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

***Задача 19.*** Дана плотность распределения случайной величины *X*

0, при *x*



0;

*f* (*x*)

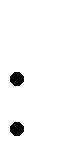
*x x* 2

3

, при 0

*x* 3;

0, при

*Найти* а) коэффициент ;

1. 3.

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

***Задача 20.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

0,

*x*3

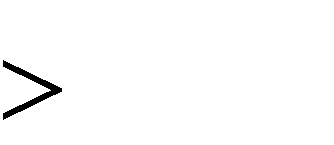
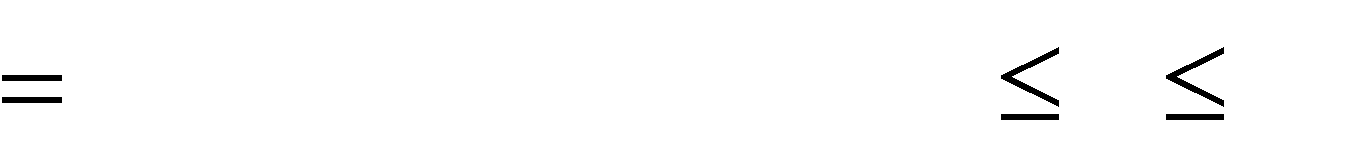
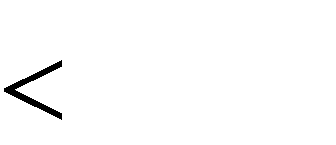
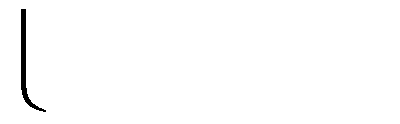
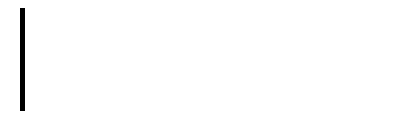
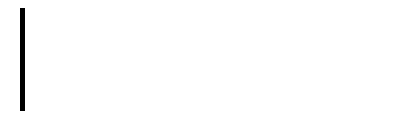
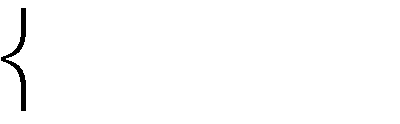
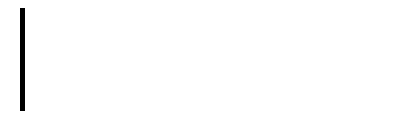
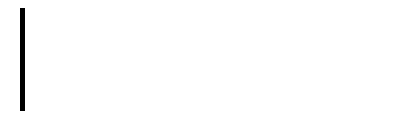
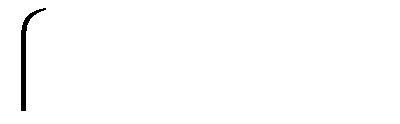
0,

*a* ,

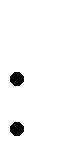
при *x* 1;

при 1 *x* 4;

при *x* 4.



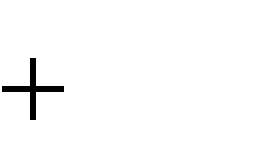
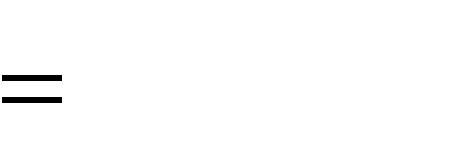
*f* (*x*)

*Найти* а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*); г) вероятность *P*(3 < *X* < 5).

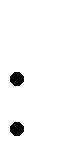
***Задача 21.*** Дана плотность распределения случайной величины *X*

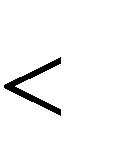
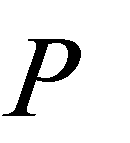


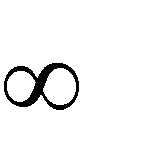
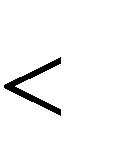
*a*

*ex e*-*x*

*f* (*x*)

*Найти* а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения *F* (*x*); в) вероятность (0 *X*



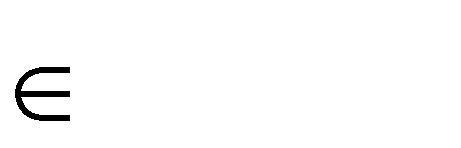
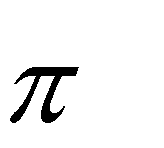
).

***Задача 22.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

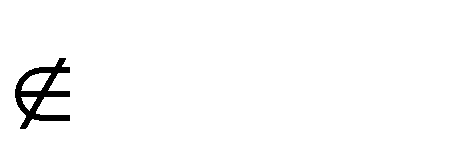
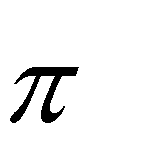
*f* (*x*)

при *x*

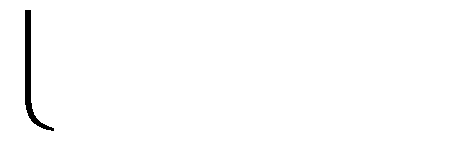
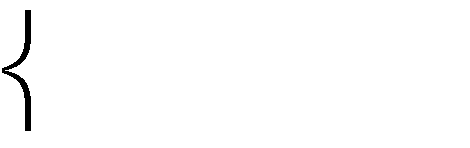
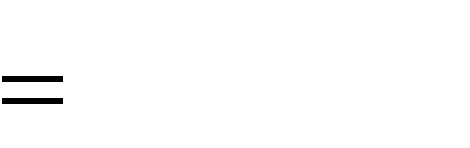
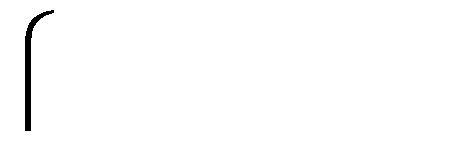
при *x*



[0, ];

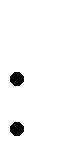


[0, ].

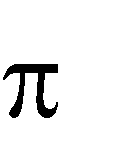
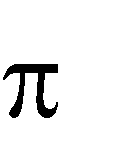


*a* sin *x*,

0,

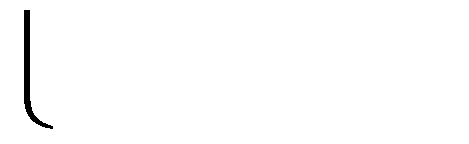
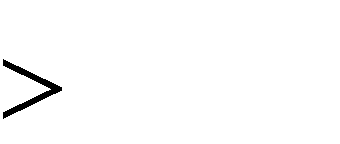
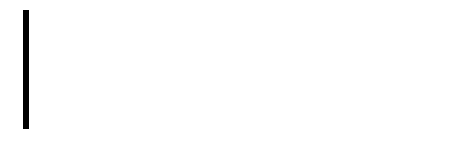
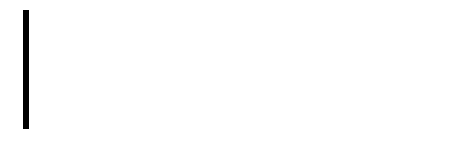
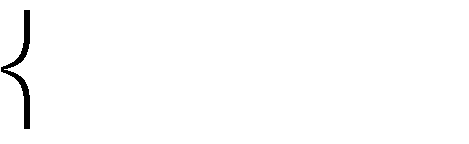
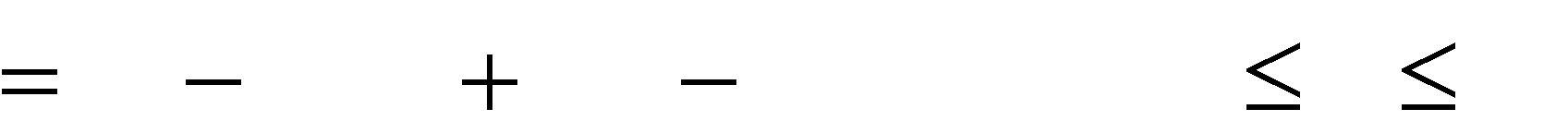
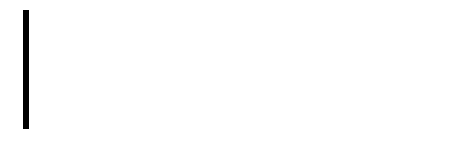
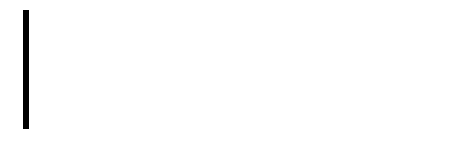
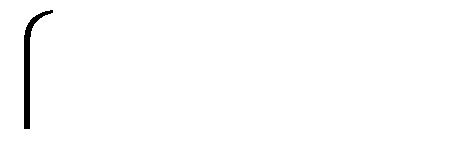
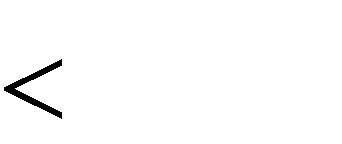
*Найти* а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*); г) вероятность *P* ( /2 < *X* < 3 /2).

***Задача 23.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*f* (*x*)



0,

при *x*

3 *x*2

4

6 *x*

45

4

, при 3

*x* 5;

0, при *x* 5.

3;

*Найти*: а) функцию распределения *F* (*x*);

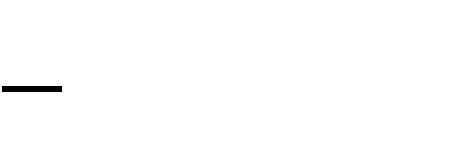
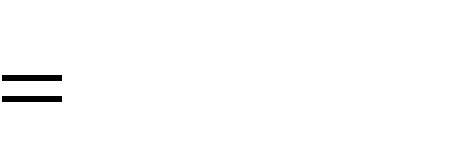
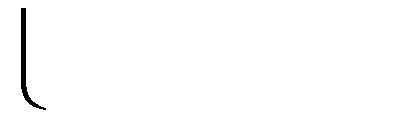
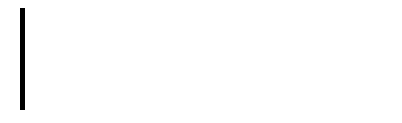
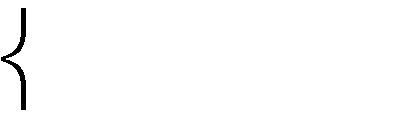
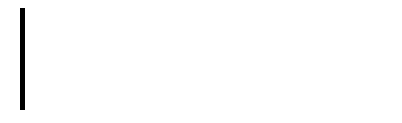
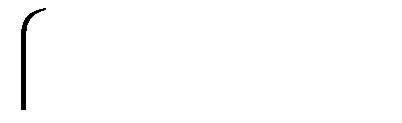
б) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

***Задача 24.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*f* (*x*)

при *x*

при *x*



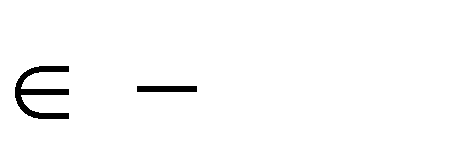
1

9

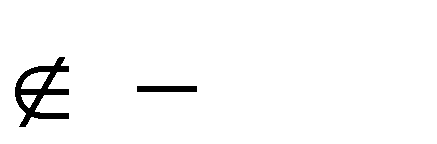
*x*2

,

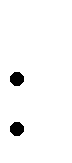
0,



( 3, 3);

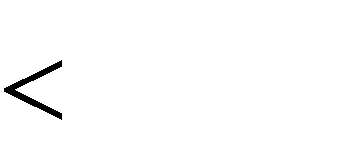


( 3, 3).

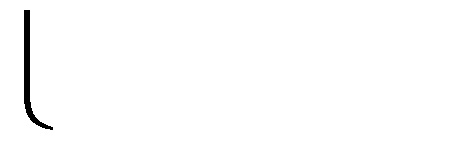
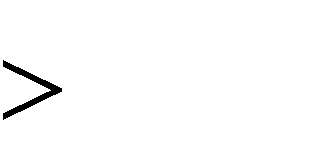
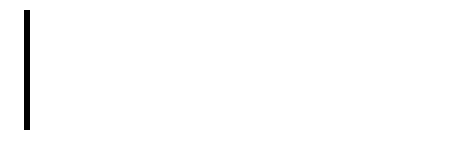
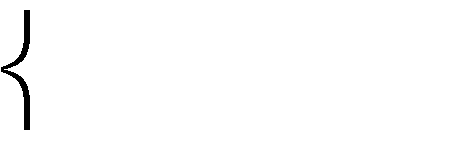
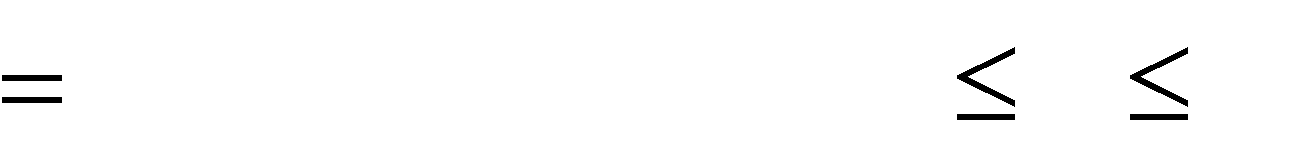
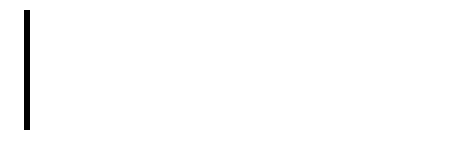
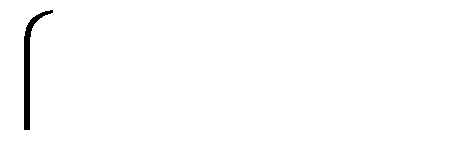
*Найти* а) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*);

б) что вероятнее: в результате испытания окажется, что случай- ная величина *X* < 1 или что случайная величина *X* > 1?

***Задача 25.*** Пусть задана функция распределения непрерывной случай- ной величины *X*



0;



0,

*a x*3, 1,

при

при при

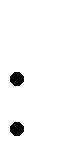
*x*

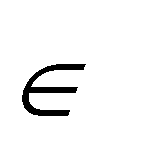
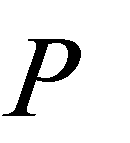
0 *x* 1;

*x*

1.

*F* (*x*)

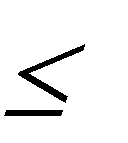
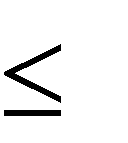
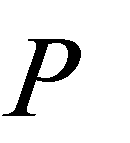
*Найти* а) коэффициент *a*;

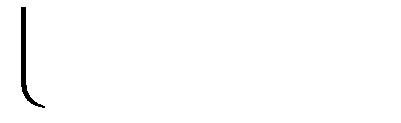
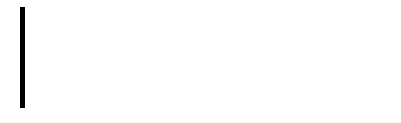
б) плотность распределения случайной величины *f* (*x*); в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*); г) вероятность (*X* (0,2; 0,8)).

д) построить графики функций *f* (*x*) и *F* (*x*).

***Задача 26.*** Дана плотность распределения случайной величины *X*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0, |  | при | *x* | 0; |  |
| *f* (*x*) | *A*(4*x*  0, | *x*2), | при при | 0  *x* | *x*  4. | 4; |

*Найти*: коэффициент *A,* функцию распределения *F* (*x*) и (- 2 *X* 3).

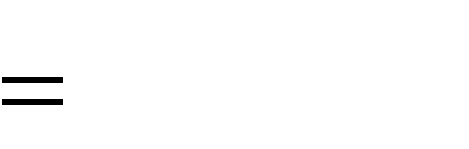
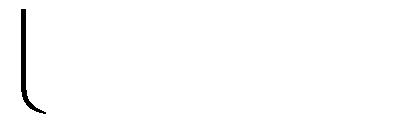
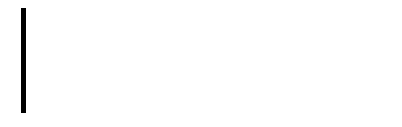
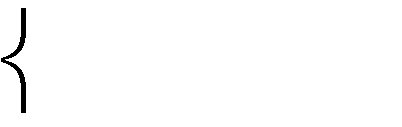
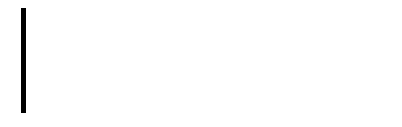
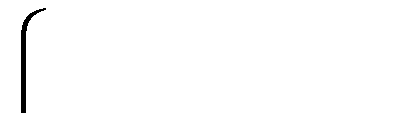
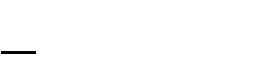


***Задача 27.*** Случайная величина *R* – расстояние от точки попадания до цен- тра мишени, распределена по закону Рэлея

*f* (*r*)

при *r*

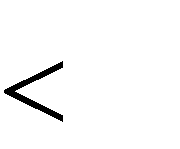
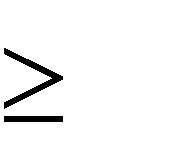
при *r*



*Ar e*

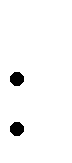
0,

*h* 2 *r* 2 ,



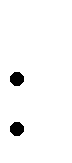
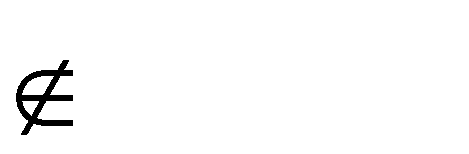
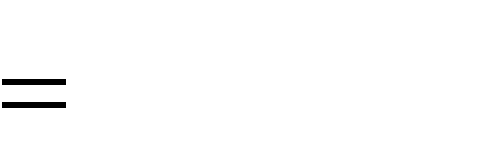
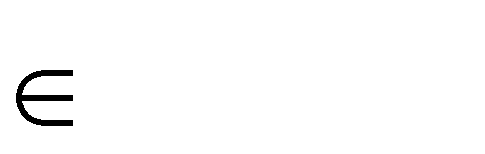
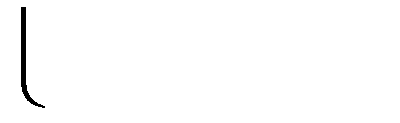
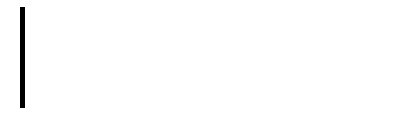
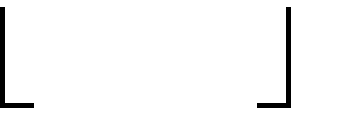
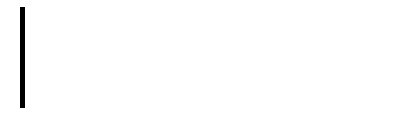
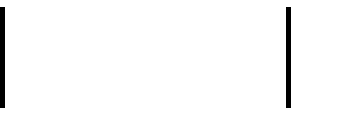
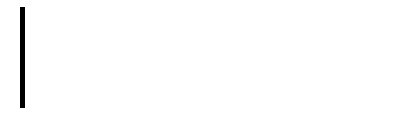
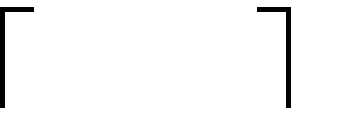
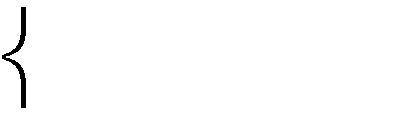
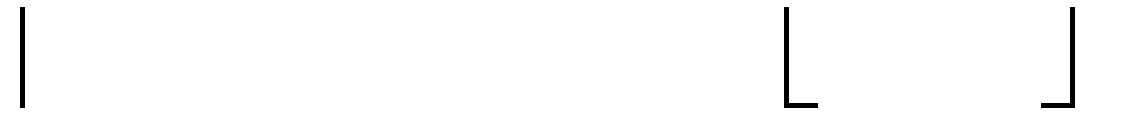
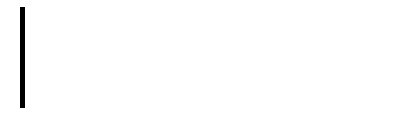
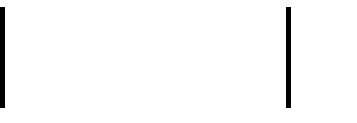
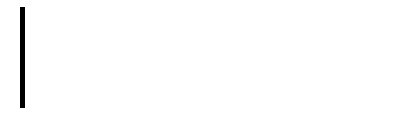
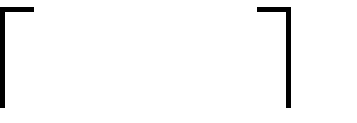
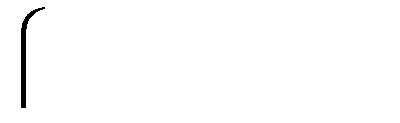
0;

0.

*Найти*коэффициент *A*; моменты *E*(*R*) и *D*(*R*); моду *R*, то есть точку максимума плотности распределения случайной величины *R*.

***Задача 28.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*c* , при *x* 1 , *e* ;



*f* (*x*) *x e*

*e* = 2.71…

### 0 , при *x*

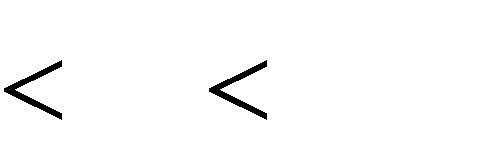
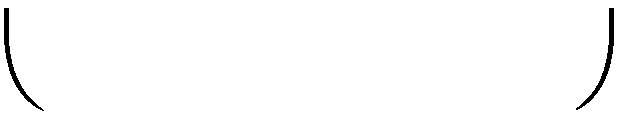
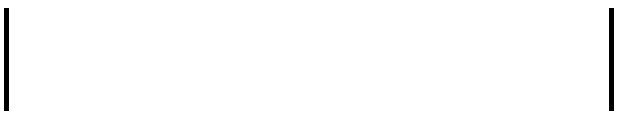
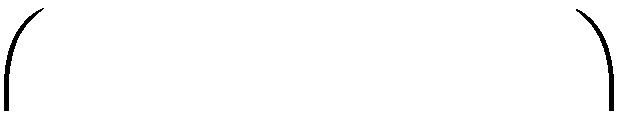
1 , *e* .

#### *e*

*Найти* а) коэффициент *c*;

б) функцию распределения *F* (*x*);

в) математическое ожидание *E* (*X*) и дисперсию *D* (*X*);



*e*

2

*X*

3*e* 2

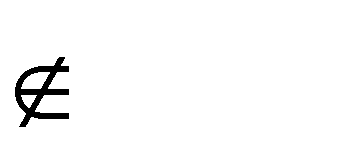
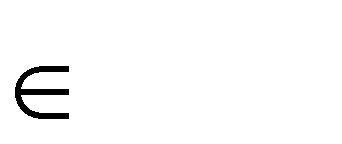
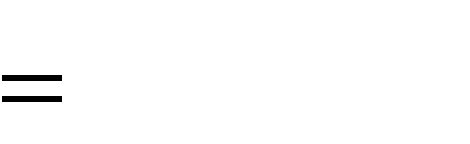
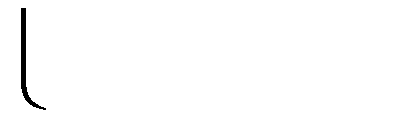
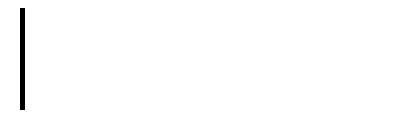
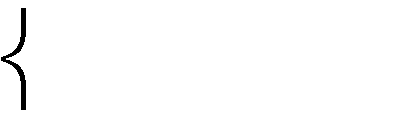
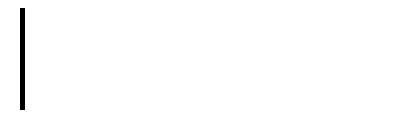
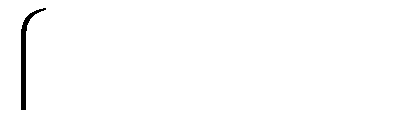
г) вероятность *P*

***Задача 29.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*f* (*x*)

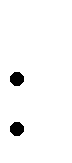
*c* arctg *x*, при *x*

0, при *x*



[0,1];

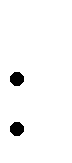
[0,1].

*Найти* а) коэффициент *c*;

б) функцию распределения *F* (*x*); в) математическое ожидание *E* (*X*).

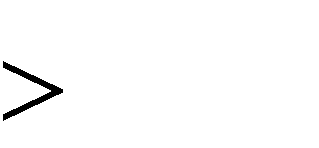
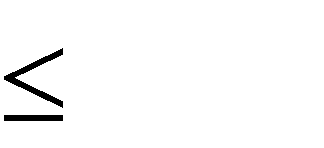
***Задача 30.*** Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид

*f* (*x*)

*Найти* а) коэффициент *a*;

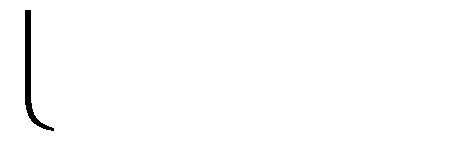
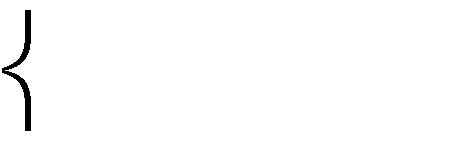
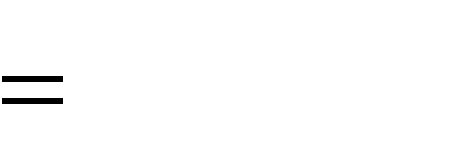
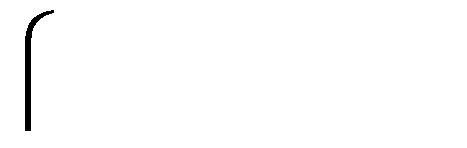
при *x*

при *x*



2;

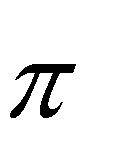
2.



*a* cos2 *x*,

0,

б) вероятность того, что в двух независимых испытаниях случай-



*/*

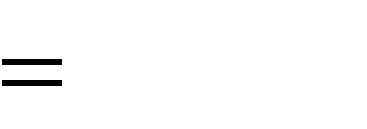
ная величина *X* примет значения больше чем 4.

**Тема 6**

**Функции случайных величин**

*Пусть Х– случайная величина, а g=g(t)–измеримая (например, непрерывная) функция, определенная при любом значении x случайной величины X. Обозначим через Y=g(X) функцию от случайной величины X. Нас будет интересовать за- кон распределения случайной величины Y, при условии, что закон распределения X и функция g=g(t) известны. В разделе 6 (см. с. 51-53) учебного пособия рас- смотрены - случай дискретной случайной величины Х и случай монотонной функции g = g(t) и непрерывной случайной величины X. Мы приведем некоторые общие сведения и рассмотрим пример нахождения закона распределения*

1. *при условии, что Х– непрерывная случайная величина, а g=g(t) произ-*



*g*( *X* )

*вольная измеримая функция. Пусть*

*FX* (*u*) *и*

*f X* (*u*)

* *функция распределения и*

*плотность распределения случайной величины*

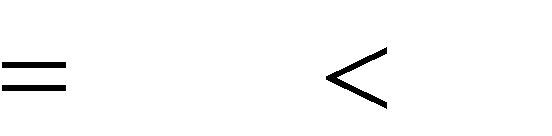
*X* , *а*

*FY* (*v*) *и*

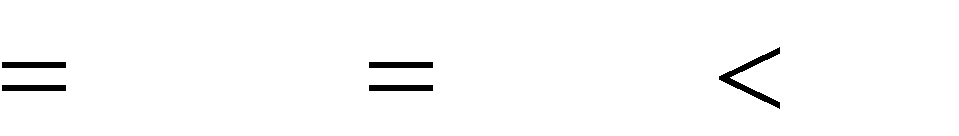
*fY* (*v*)

* *функция*

*распределения и плотность распределения случайной величины Y . По опреде-*



*P*(*Y v*).



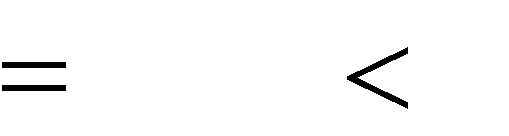
{*x* : *y g*(*x*) *v*}.

*лению*

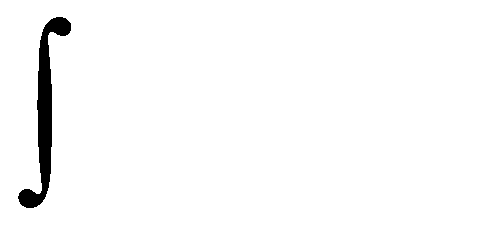
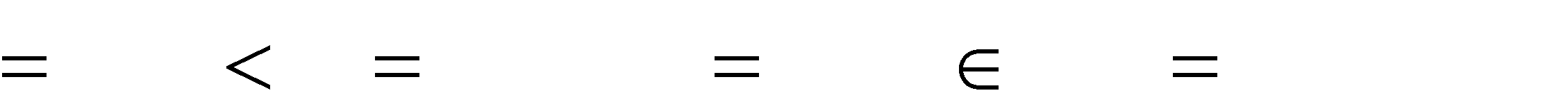
*FY* (*v*)

*Обозначим через*

*Dv множество значений ” x” слу-*

*чайной величины X , для которых*

*FY* (*v*)



*P*(*Y v*) *PX* (*Dv* ) *P*(*X Dv*)

*f X* (*t*)*dt*.

1. *g*(*x*)

*v : Dv*

*Dv*

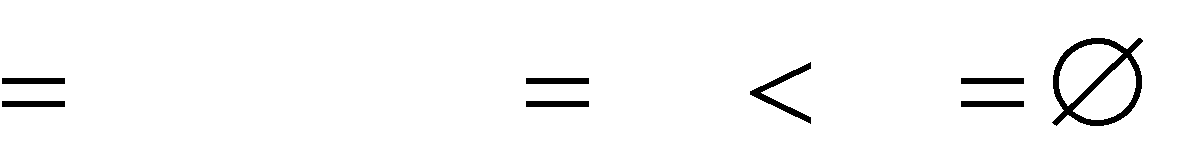
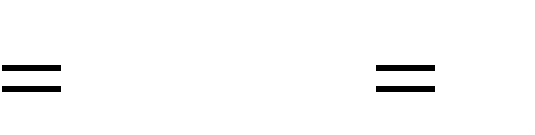
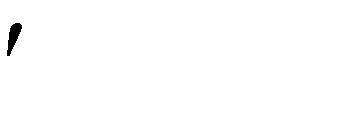
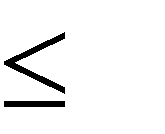
*Тогда*

*Часто удобнее указать множество D v непосредственно и вычислить*

##### *Пример 1.*

*PX* (*Dv*) *.*

*Пусть X – непрерывная случайная величина, а g(t)=t 2. Найдем*



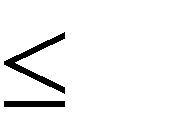
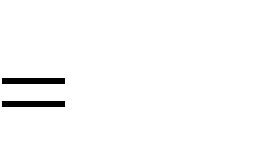
{*x* : *Y* (*x*)

*x*2

*v*}

.

*FY* (*v*) *и fY* (*v*) *,*

*где Y X* 2 *. Если v*

0 *, то множество*

*D v пусто: Dv*

*Следовательно, fY* (*v*)

*FY* (*v*) 0

*при v*

0 *. При v > 0 множество*

*D v имеет вид*

*Dv*



{*x* : *Y* (*x*)

*x*2

*v*} { *v x v*}.

*FY* (*v*)

*Отсюда при v > 0 получаем, что*

*и, дифферен-*



*P*(*X* 2 *v*)

*P* (*D* )

*X v*

*P*( *v X*

*v*)

*F* ( *v*)

*X*

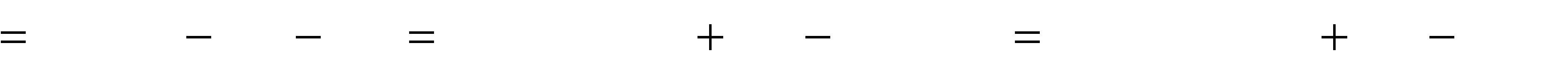
*F* (

*X*

*v*)

*цируя по v, получим выражение для плотности распределения случайной вели- чины Y через плотность случайной величины X:*

*fY* (*v*)



*F* ( *v* )

*X*

*F* (

*X*

*v* )

*f* ( *v* )

*X*

1

2 *v*

*f* (

*X*

*v* ) 1

2 *v*

1

2 *v*

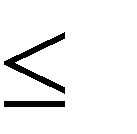
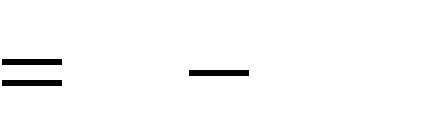
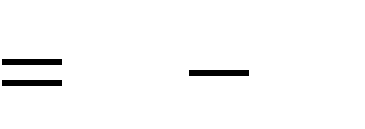
*f* ( *v* )

*X*

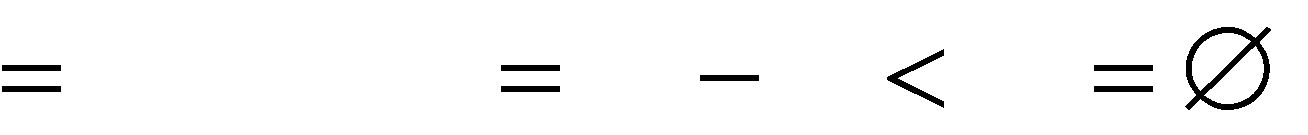
*f* (

*X*

*v* ) .

***Пример 2.*** *Пусть случайная величина X равномерно распределена на про-*

*межутке* [2, 6]*, а*



{*x* : *Y* (*x*) | 3 *x* | *v*}

.

*g*(*t*) | 3

*t* | *. Найдем*

*FY* (*v*) *и*

*fY* (*v*) *, где Y* | 3

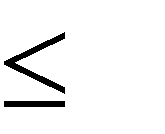
*X* | *. При v 0*

*множество Dv пусто:*

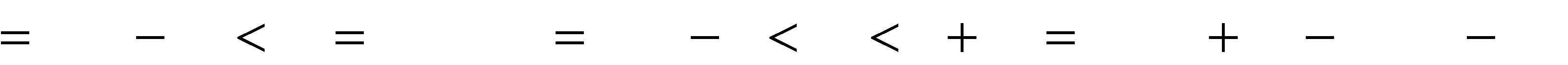
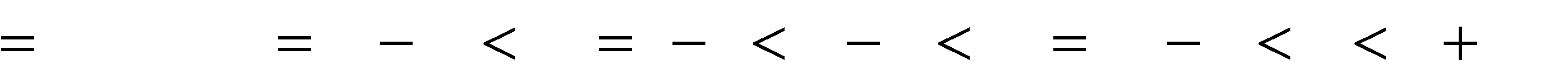
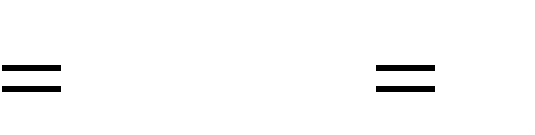
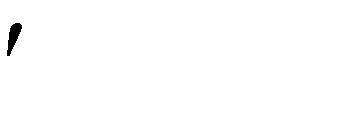
*Dv*

*Следовательно, при v*

*плотность распределения*



0



*fY* (*v*)

*FY* (*v*) 0 *. При v > 0 множество Dv имеет вид*

*Dv* {*x* :*Y* (*x*) | 3

*x* | *v*} { *v x*

3 *v*} {3 *v x*

3 *v*}. *Отсюда при v > 0*

*FY* (*v*)

*P*(3

*X v*)

*PX* (*Dv* )

*P*(3 *v X*

3 *v*)

*FX* (3 *v*)

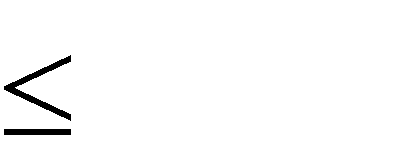
*FX* (3

1. *Укажем*

*функцию распределения*

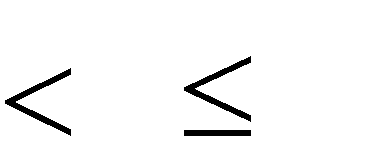
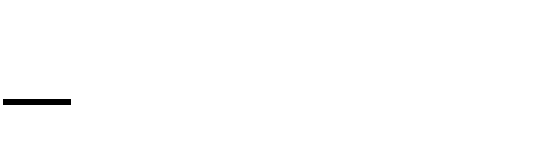
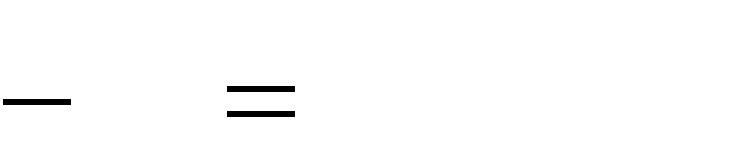
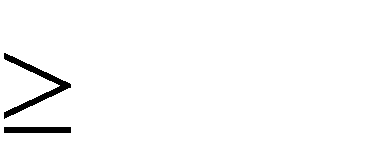
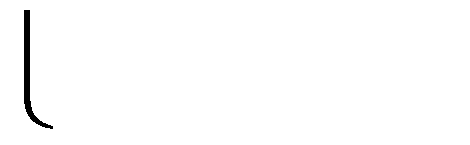
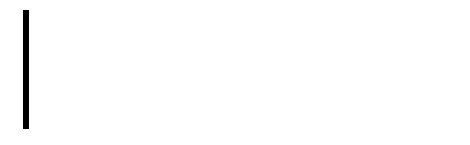
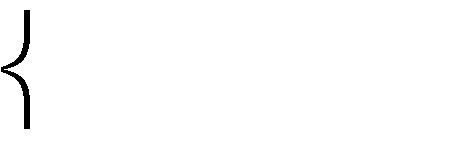
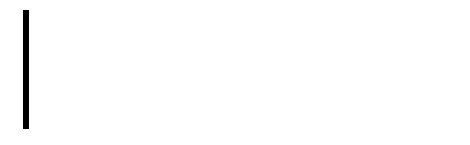
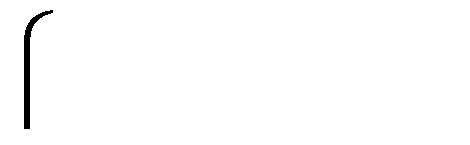
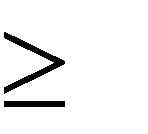
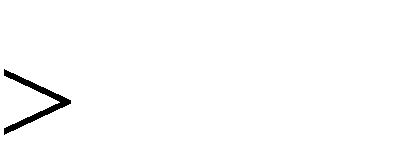
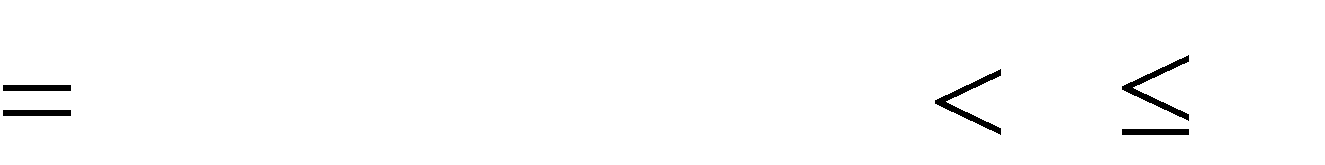
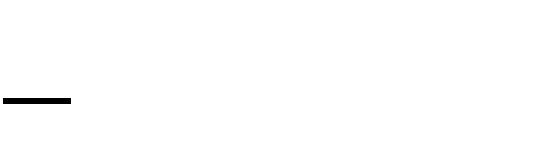
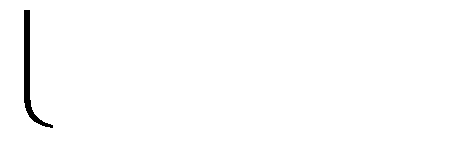
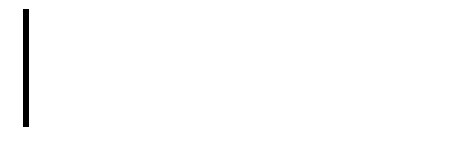
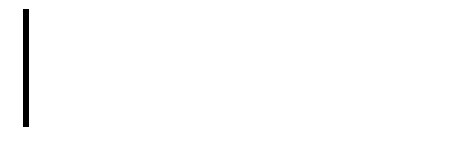
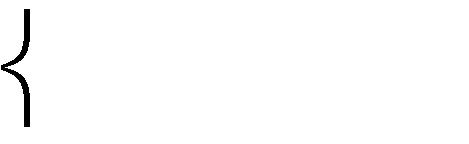
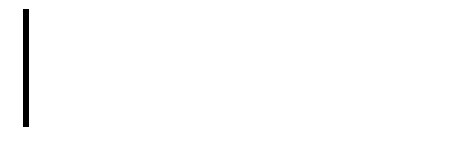
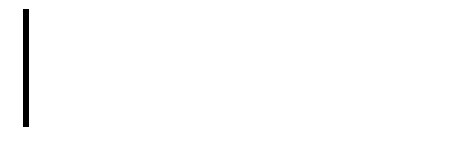
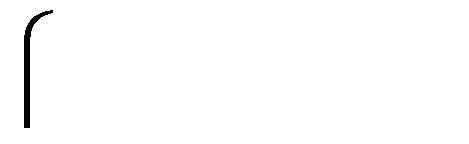
*FX* (*u*)

*равномерного на* [2,6] *распределения:*



2;

*При v > 0 выражение 3 имеем*: 3



0,

*F* (*u*)

*X*

*u* 2 ,

4

*при u*

*при* 2 *u* 6;

1, *при u* 6.

*– v всегда меньше трех, а при v* 1

0,

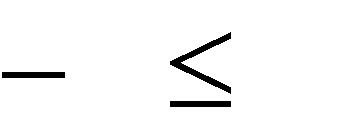
*v*)

1 *v* ,

4

*при v* 1;

*при* 0 *v* 1.



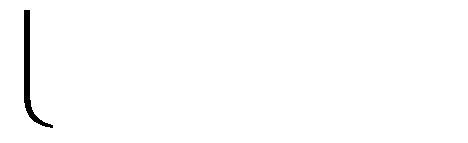
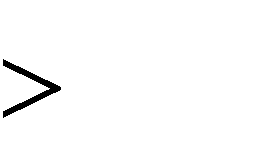
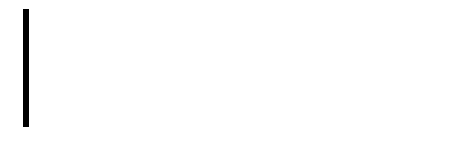
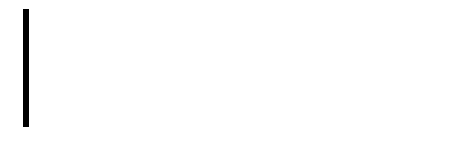
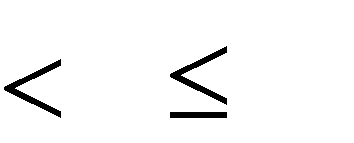
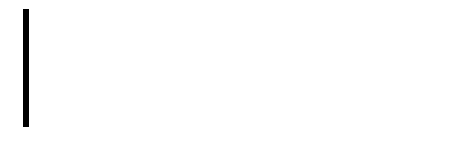
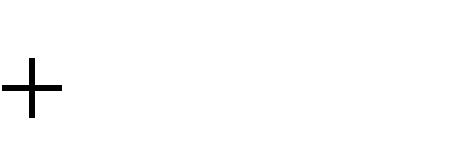
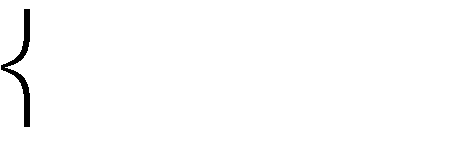
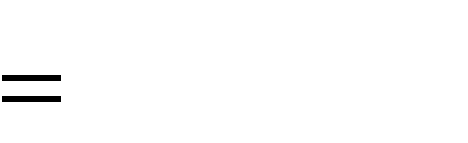
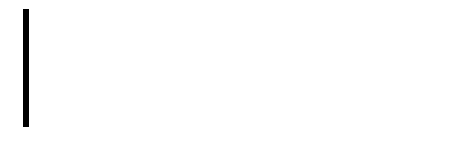
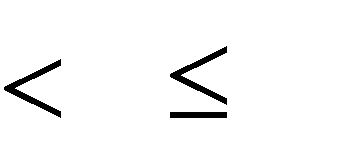
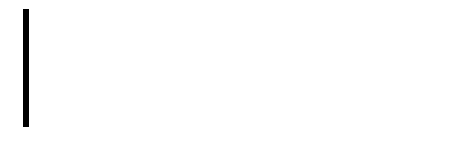
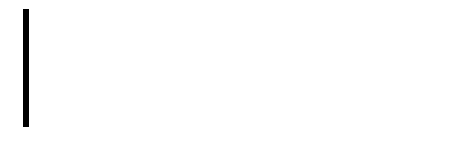
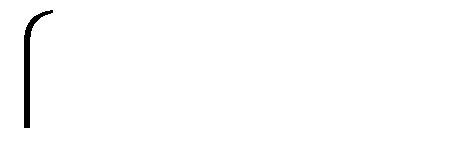
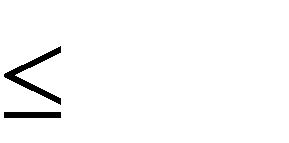
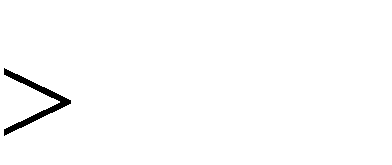
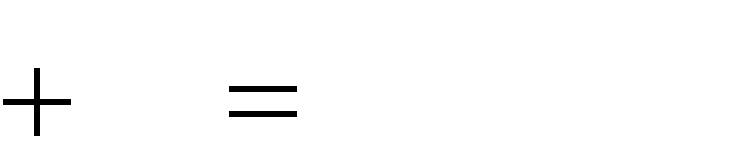
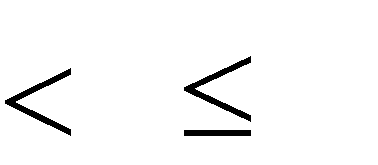
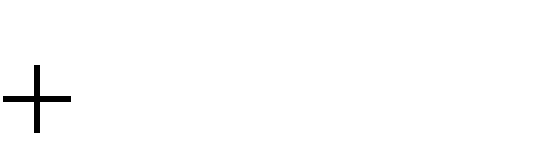
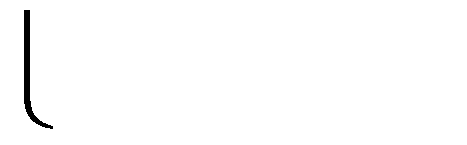
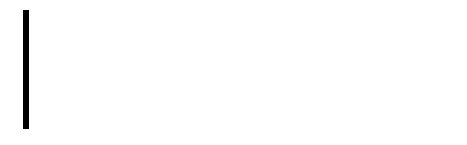
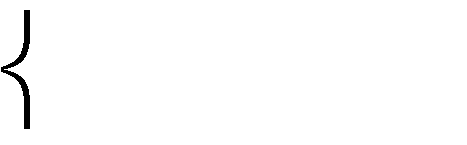
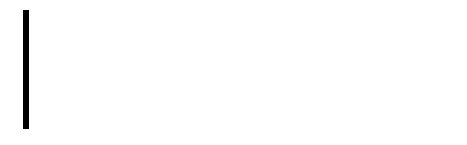
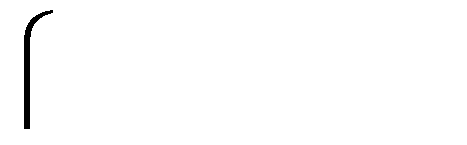
*v* 2.

*Следовательно,*

*FX* (3

*Для того чтобы получить это выражение мы рассмотрели в качестве ар-*

*гумента “u” функции*



*v*)

1 *v* ,

4

1,

*при* 0

*при v*

0,

*v* , 2

1 *v* ,

4

1,

*при*

*v* 0;

*при* 0

*v* 1;

*при* 1

*v*

3;

*при v*

3.

*v* 3,

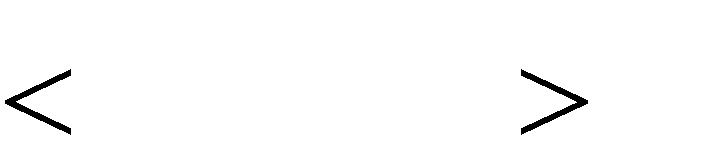
3.

*FX* (3

*FX* (*u*)

*величину u = 3 – v. Аналогично,*

*Следовательно,*

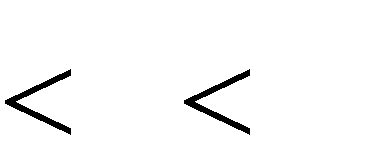
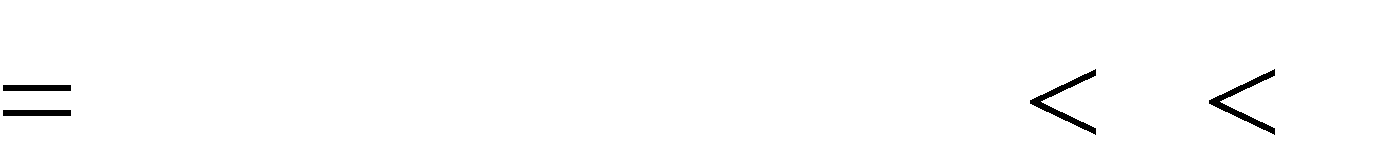
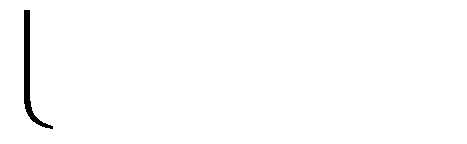
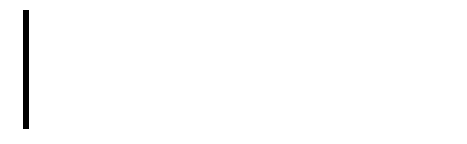
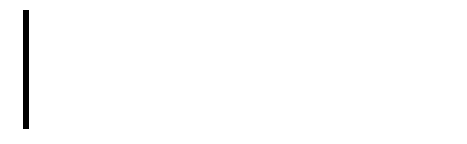
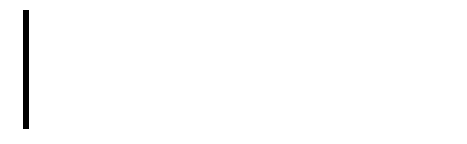
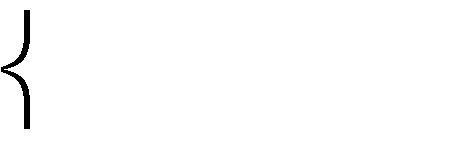
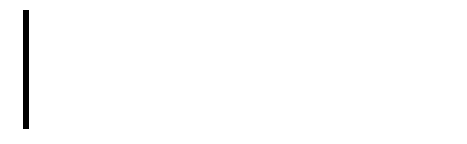
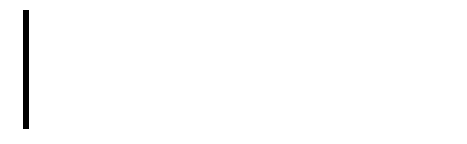
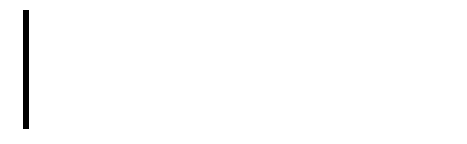
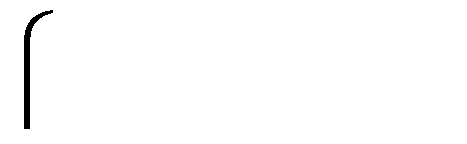


0 *или v* 3;

*FY* (*v*)

*fY* (*v*)

*Для нахождения моментов Y* –*- функции от непрерывной случайной*



0,

1 ,

2

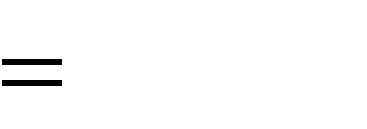
*при v*

*при* 0 *v* 1;

1 ,

4

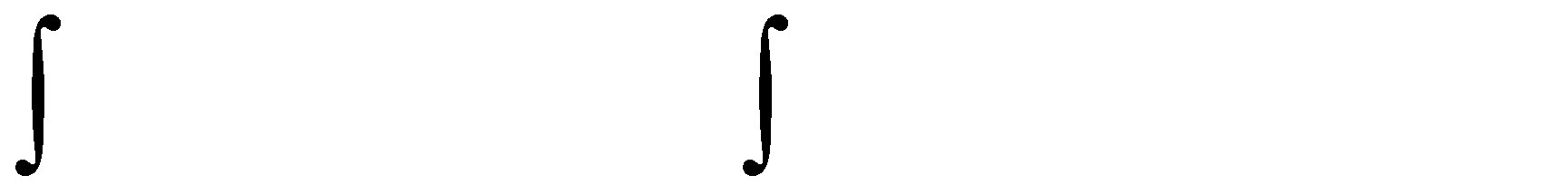
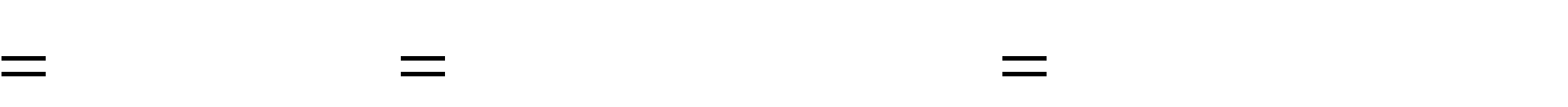
*при* 1 *v* 3.



*g*( *X* )

*величины X можно пользоваться следующими формулами для нахождения ма-*

*тематического ожидания*



*E*(*g*( *X* ))

*g*(*u*) *f X* (*u*) *du v fY* (*v*) *dv*,

*E*(*Y* )

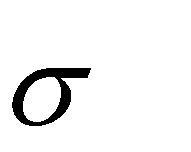
*E*(*Y* ) *:*

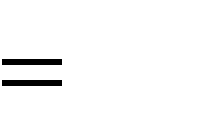
*R R*

(2)

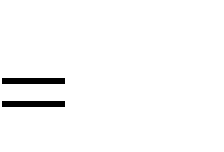
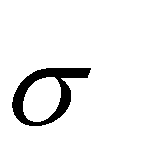
*а также определением и свойствами моментов (например, D(X)=E(X-E(X))* 2 *).*

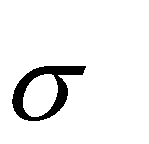
##### *Пример 3.*

*Пусть X* □ *N*(*a*, 2) *, то есть случайная величина X имеет нормальное рас-*



*a*,



*пределение с параметрами а и* 2 *. Напомним, что E*( *X* )

*D*(*X* )

2 *, а*

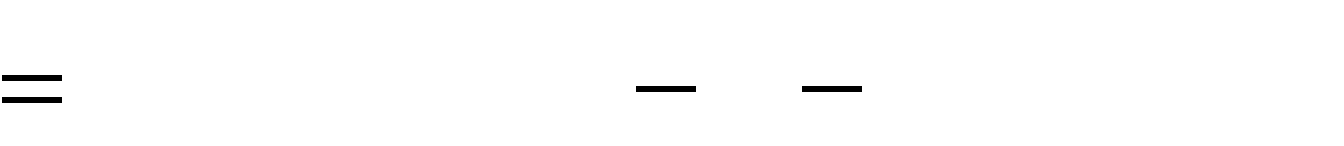
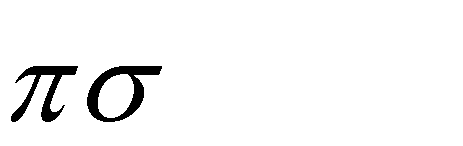
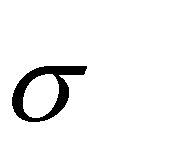
*плотность распределения имеет вид*

*fX* (*t*)

* 1. exp( (*t a*)2 / 2 2

2) *. Пусть*

*g*(*t*)

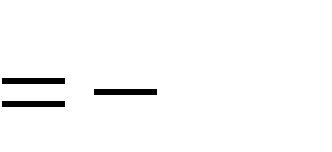


*и Y = g(X), Z = 3 X - 2Y + 5, T=2X+3. Найдем*

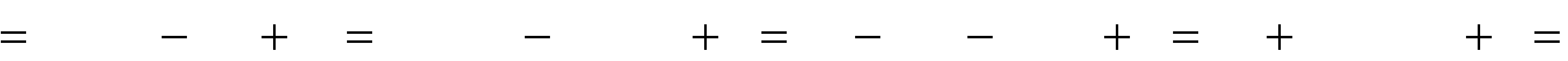
*E*(*Z* )

*и ковариацию*

*K(X,T). Используя свойства математического ожидания и выражение диспер- сии через начальные моменты (см. с. 33, 35 учебного пособия), будем иметь E*(*Z* )

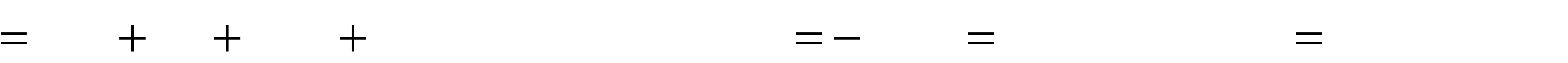
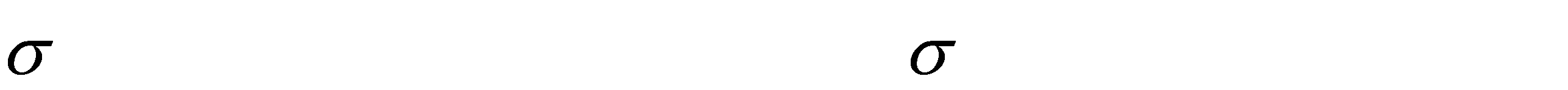


3*t* 2



*E*(3*X* 2*Y* 5) 3*E*( *X* ) 2*E*(*Y* ) 5 3*a* 2*E*( 3*X* 2) 5 3*a* 6*E*( *X* 2) 5

6*a*2



3*a* 6 2

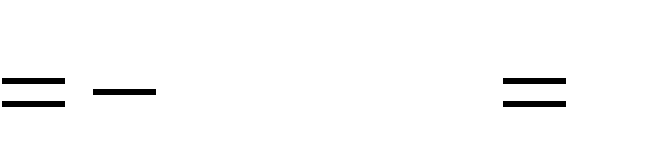
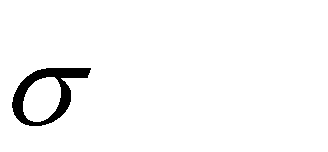
5. *Например*, *при a*

1, 2

* 1. *имеем E*(*Z* ) 20.

*Коэффициент корреляции r*(*X,T*) = 1 (*см. с. 49*)*, откуда K*(*X,T*)*= σ(X)σ*(*T*)*=*2*σ2 (мы воспользовались тем, что D*(*aX+b*)*=a2D(X) для любых постоянных a и b).*

##### *Пример 4.*



1,

2

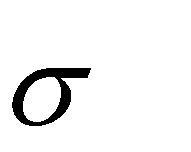
2

*В условиях предыдущего примера при*

*a найти*

*E*(| *X*

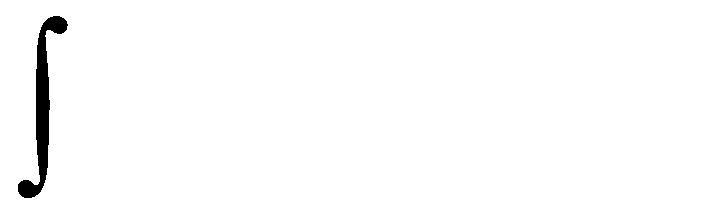
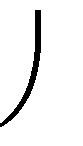
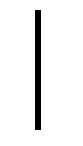
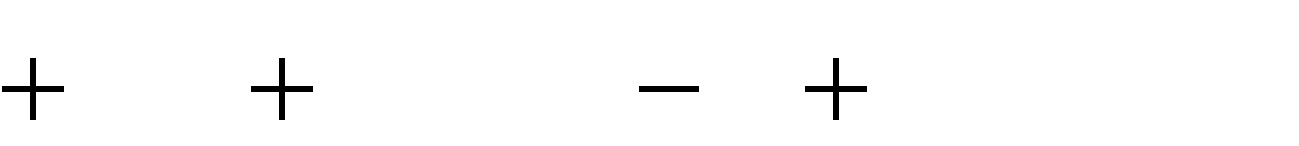
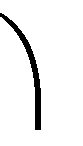
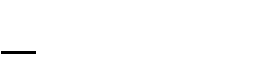
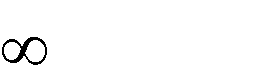
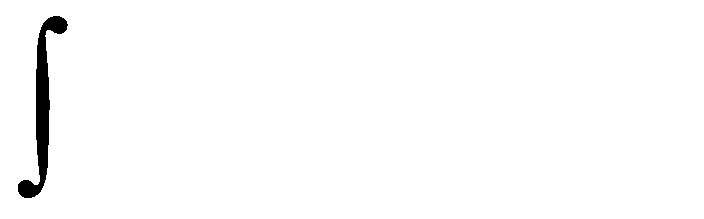
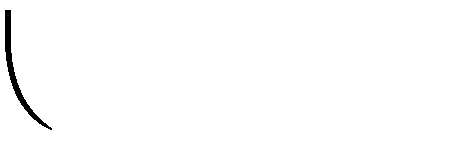
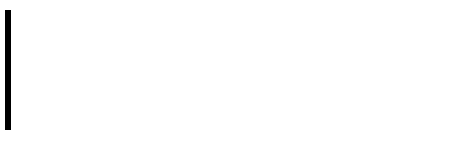
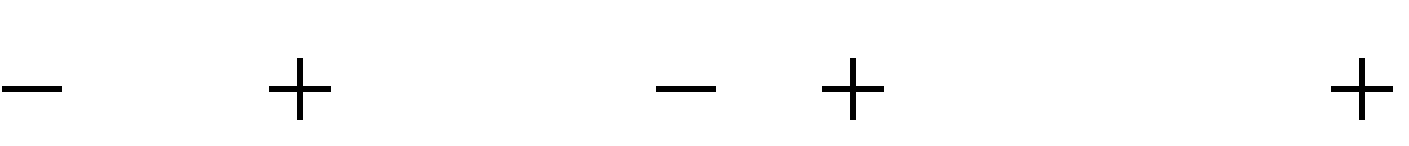
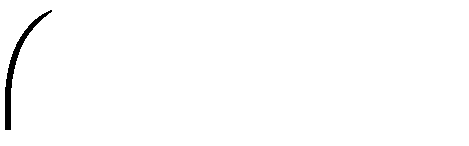
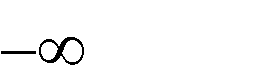
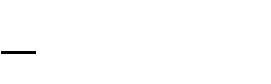
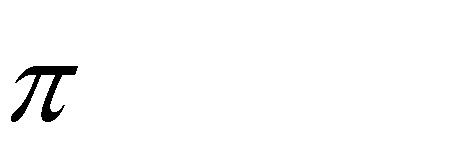
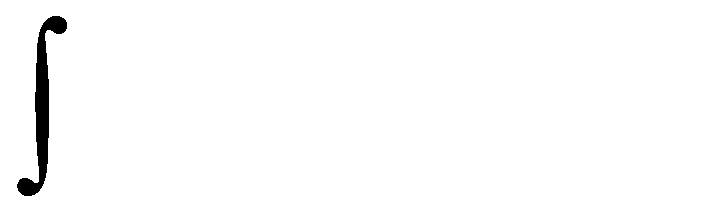
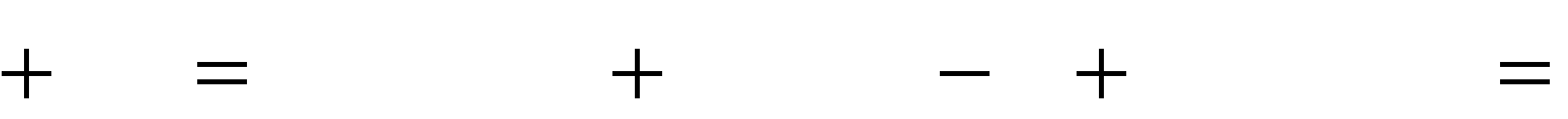
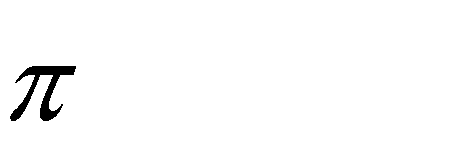
1|) *.*

*Для нахождения математического ожидания воспользуемся первой частью*

*формулы (2) и приведенным выше выражением для плотности*

*X* □ *N*(*a*,

2) *.*



*E*(| *X* 1|)

1

1

2

1

2

| *t* 1| exp( (*t* 1) / 4) *dt*

(*t* 1)exp( (*t* 1)2 / 4) *dt*

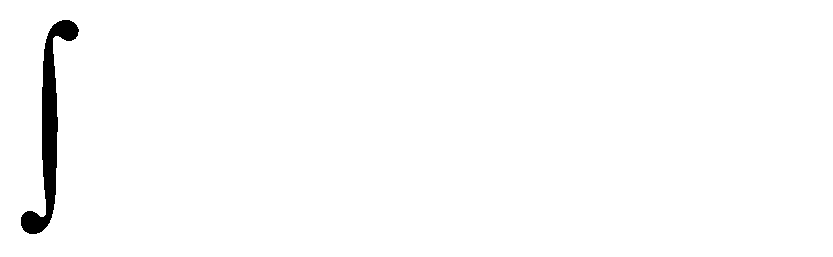
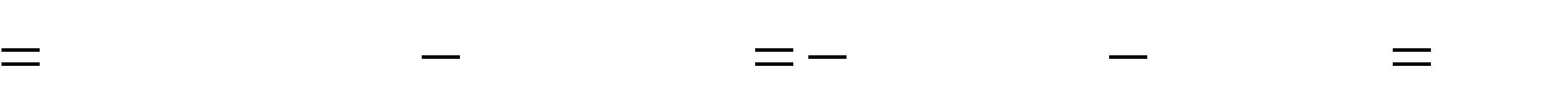
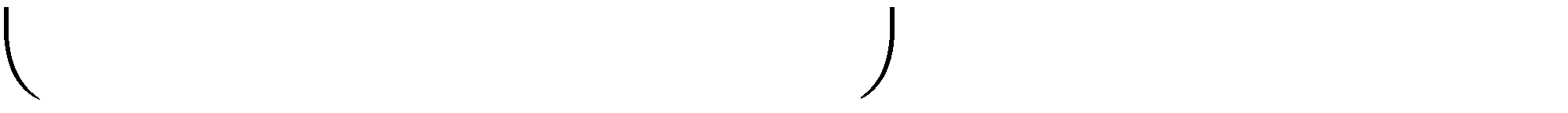
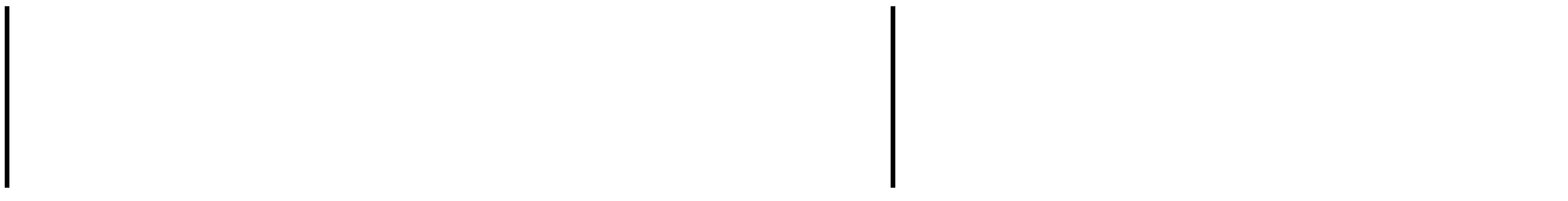
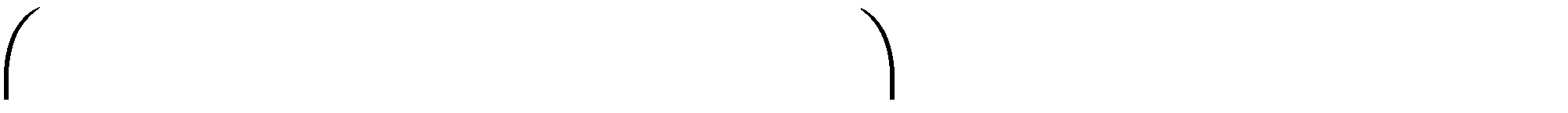
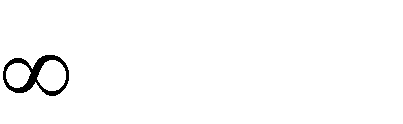
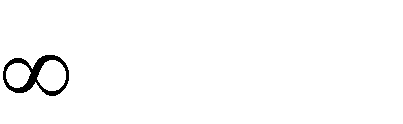
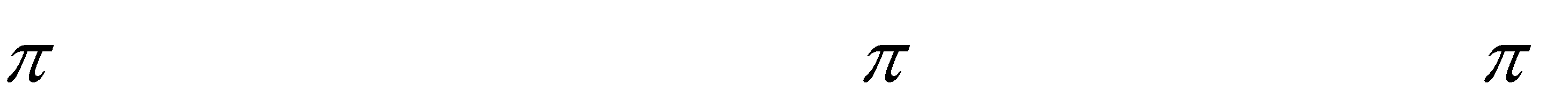
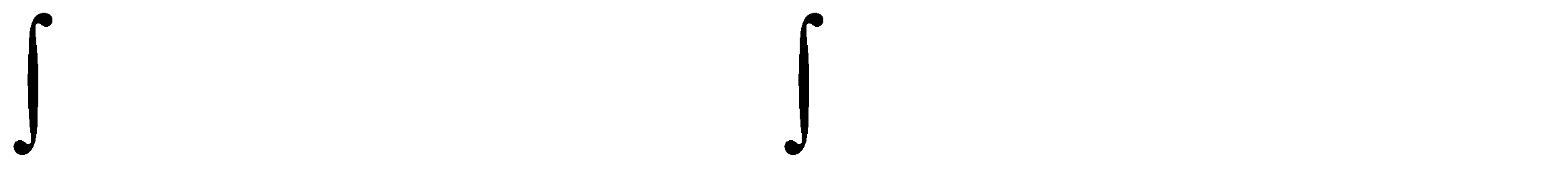
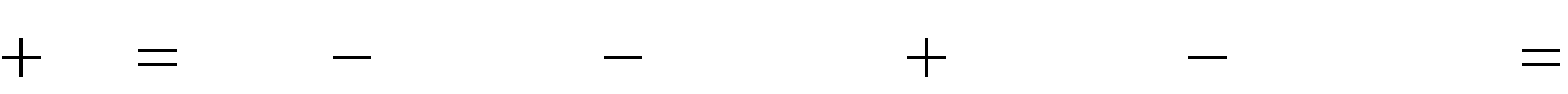
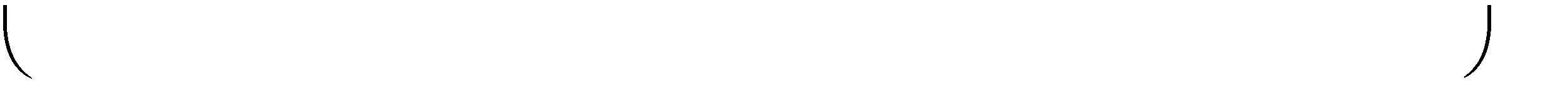
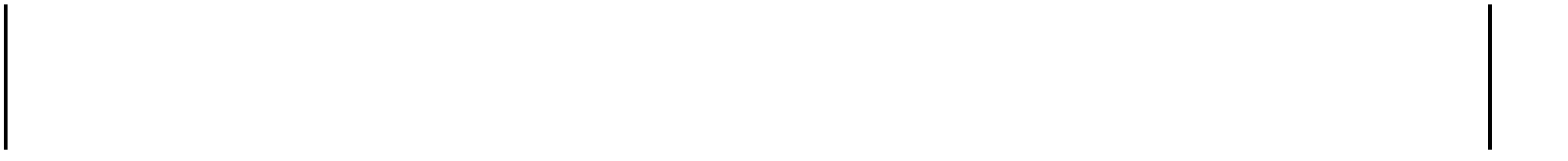
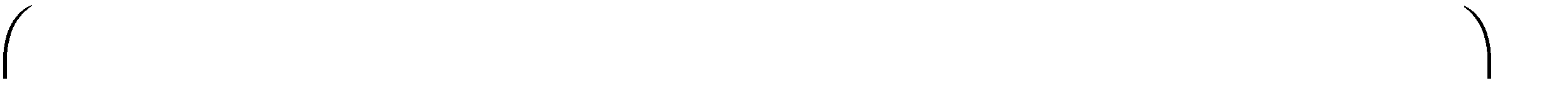
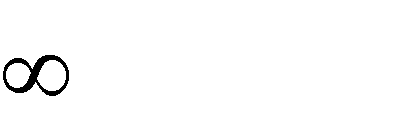
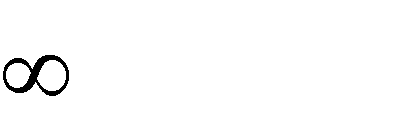
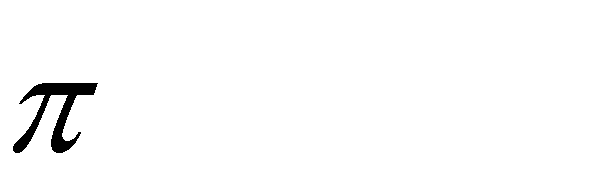
*R*

2

(*t* 1) exp( (*t* 1)2 / 4) *dt* . *Сделаем замену переменных* (*t* 1) / 2 *y и*

1

(*t* 1) / 2 *y в первом и втором интегралах соответственно, тогда имеем*



*E*(| *X* 1|)

1

0

*y* exp( *y*2 / 2)*dy*

*y* exp( *y*2 / 2)*dy*

0

2

*y*exp( *y*2 / 2)*dy*

2

exp( *y*2 / 2)

2 .

0

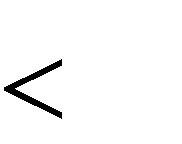
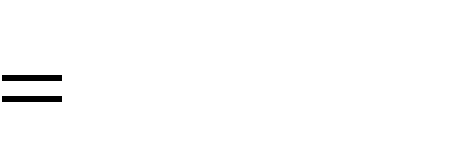
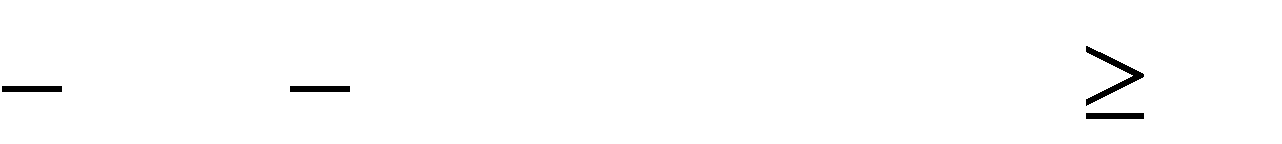
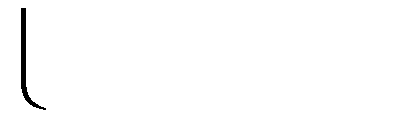
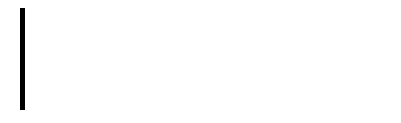
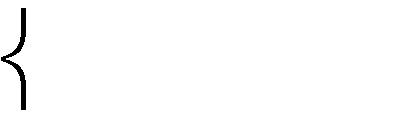
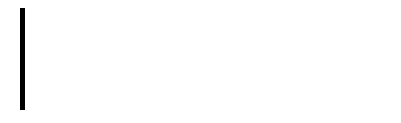
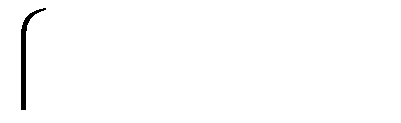
0

***Задача 1.*** Функция распределения

*FX* (*t*)

случайной величины *X* имеет вид

*FX* (*t*)



1 exp( 2*t*),

0,

*если t* 0,

*если t*

0.

Случайные величины *Y* = 2 /*X* и *Z* = 2 *X* + 5 являются функциями от случайной величины *X.*

*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y;*

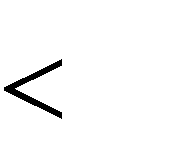
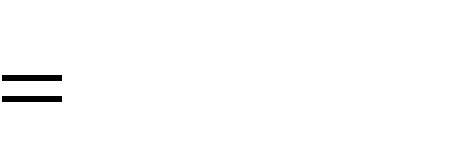
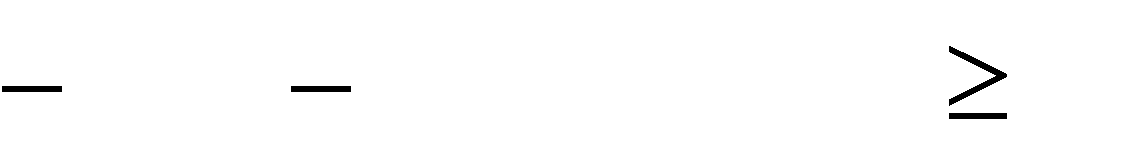
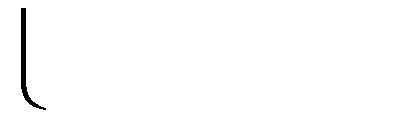
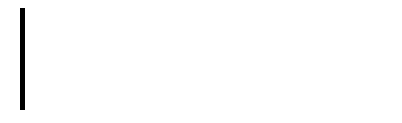
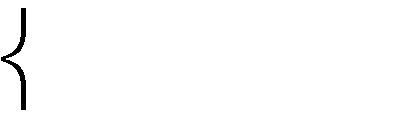
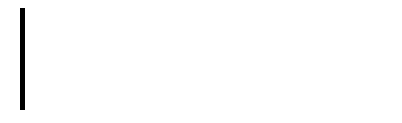
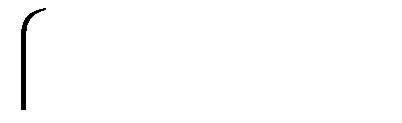
б) моменты *E*(*Z* ), *D*(*Z* ), *K* ( *X* , *Z* ) .

***Задача 2.*** Функция распределения

*FX* (*t*)

случайной величины *Х* имеет вид

*FX* (*t*)



1 exp( *t*), *если t* 0,

0, *если t* 0.

Случайные величины *Y = X 2* и *Z = -3 Х + 2* являются функциями от случайной величины *X*.

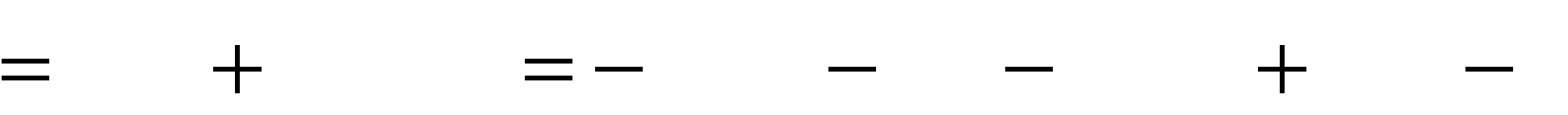
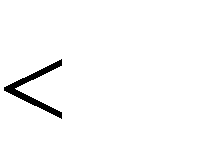
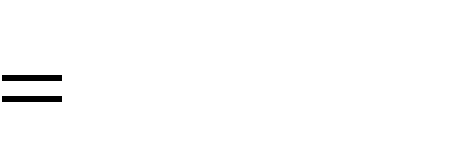
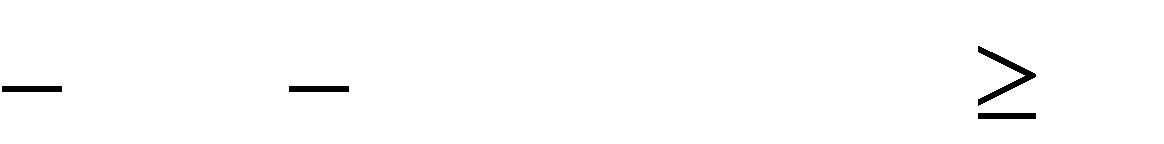
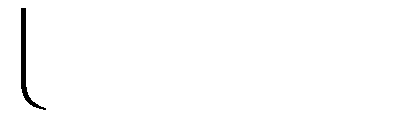
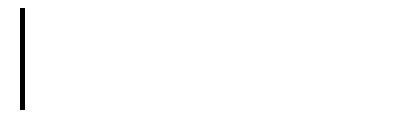
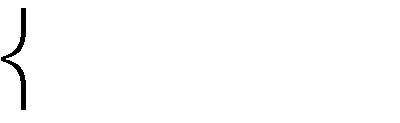
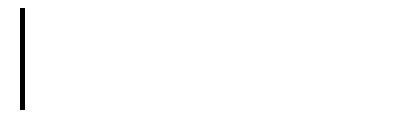
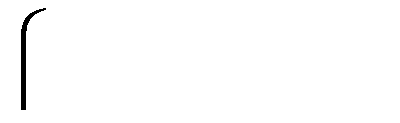
*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y*;

б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*).

***Задача 3.*** Функция распределения



*X*

(*t*)

1 exp( 3*t*), *если t* 0,

0,

*если*

*t*

0.

2*X* 1 и *Z* 2*X* 2

*Y* 2

9*XY* 2*X* 1

*F*

Случайные величины *Y*

функциями случайной величины *Х*.

*FX* (*t*)

случайной величины *Х* имеет вид:

являются

*Найти:* а) функцию распределения

*FY* (*t*)

случайной величины *Y;*

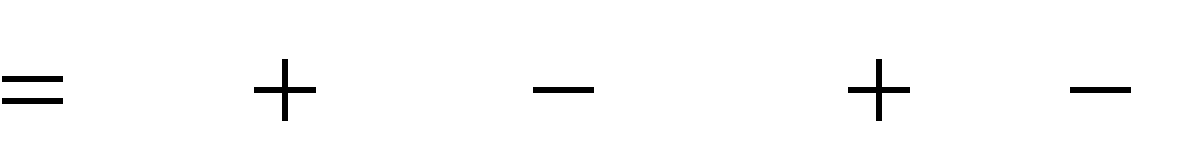
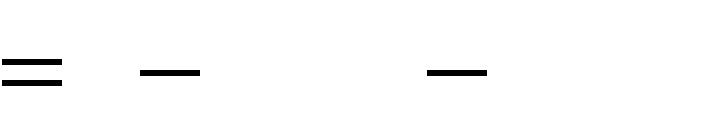
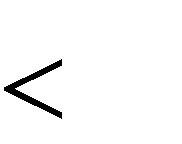
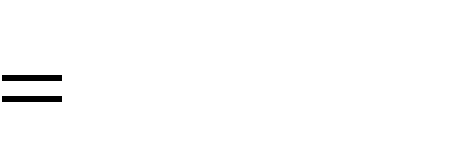
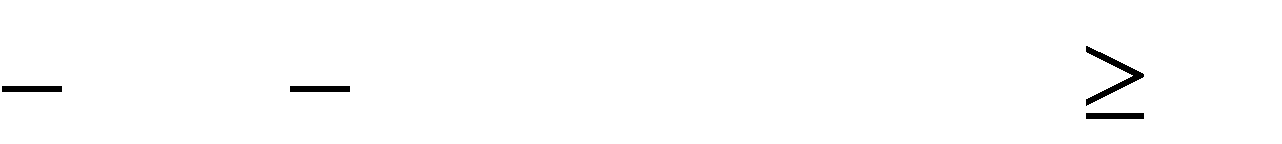
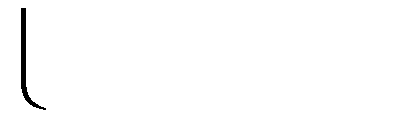
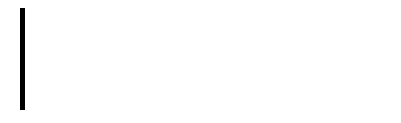
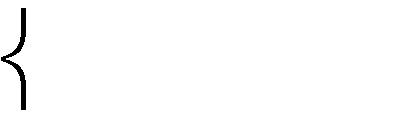
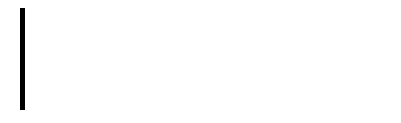
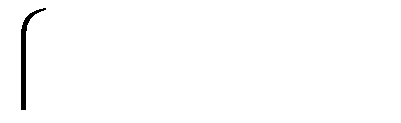
б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 4.*** Функция распределения

*FX* (*t*)

случайной величины *Х* имеет вид:

*FX*



(*t*) 1 exp( 2*t*),

0,

*если t*

*если t*

1 exp( 2*X* ) и *Z*

*X* 2

0,

0.

2*Y* 2 2*XY* 3*Y* 1

Случайные величины *Y*

функциями случайной величины *Х*.

*Найти:* а) функцию распределения

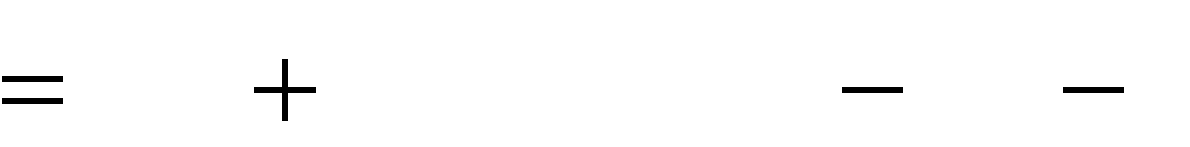
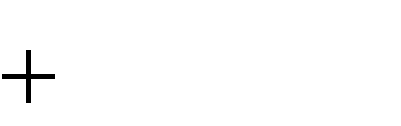
*FY* (*t*)

случайной величины *Y*;

являются

б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 5.*** Случайная величина *Х* имеет стандартное нормальное распреде-



*X* 2

2*Y* 2 2*XY*

3*Y* 1

ление. Случайные величины *Y = - X +* 2 и функциями от случайной величины *Х*.

*Z*

являются

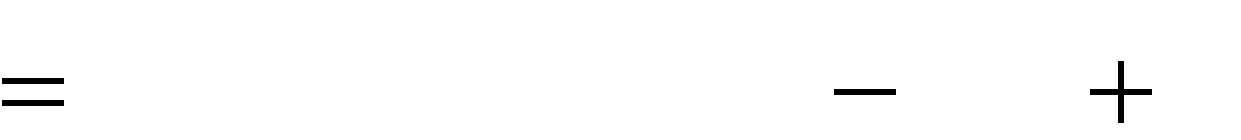
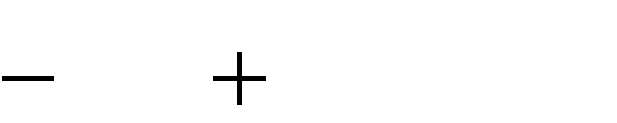
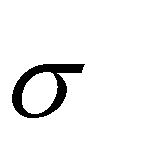
*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y*;

б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 6.*** Случайная величина *Х* имеет нормальное распределение с пара- метрами *а =*1, *=*2. Случайные величины *Y =* (*X -* 1) */* 2 и



1. 2*X* 2 *Y* 2

2*XY* 2*X*

2 являются функциями от случайной величины *Х*.

*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y*;

б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

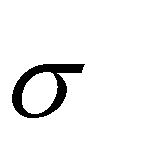
***Задача 7.*** Случайная величина *Х* имеет стандартное нормальное распреде- ление. Случайные величины *Y = X 2* и *Z =* 3 *X 2 + Y 2 –* 2 *X + Y +*1 являются функциями от случайной величины *Х*.

*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y*;

б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 8.*** Случайная величина *Х* имеет нормальное распределение с пара- метрами *a = -*1*, =* 3*.* Случайные величины *Y = Х+*1| и *Z =* 2 *X 2 – Y 2/* 3 *- X +* 2*Y +* 1 являются функциями от случайной величины *Х*.

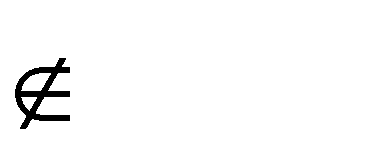
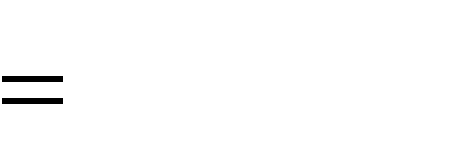
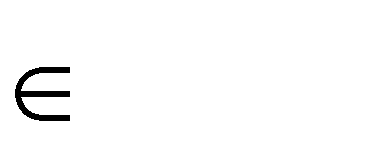
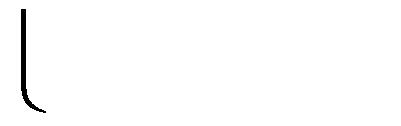
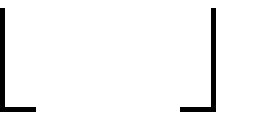
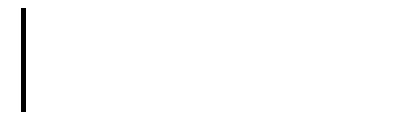
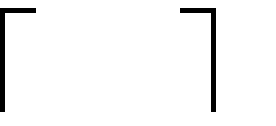
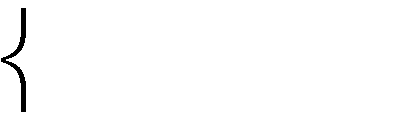
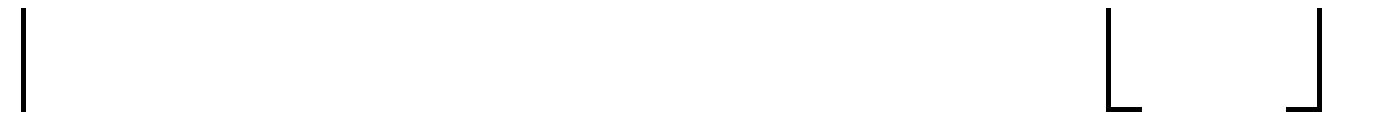
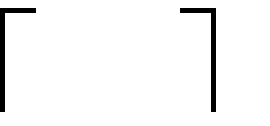
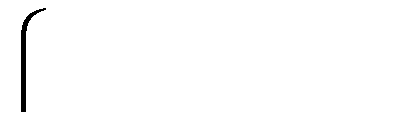
*Найти:* а) плотность распределения

*fY* (*t*)

случайной величины *Y*;

б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 9.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет вид:



1/ 3,

0,

*если t* 1, 4 ,

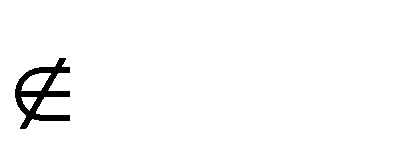
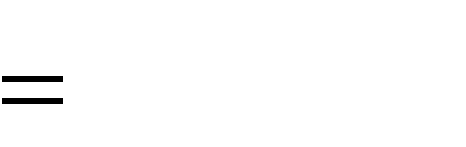
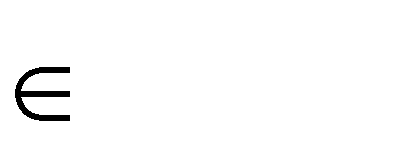
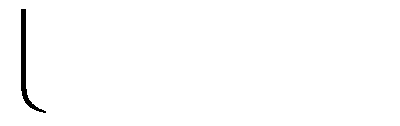
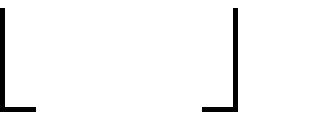
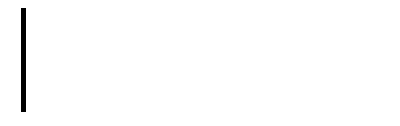
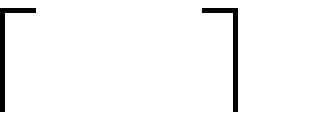
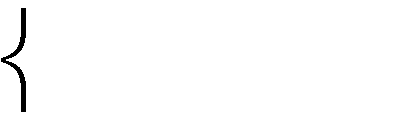
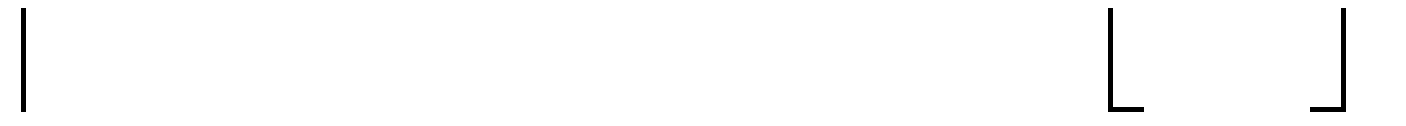
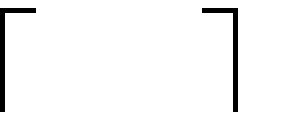
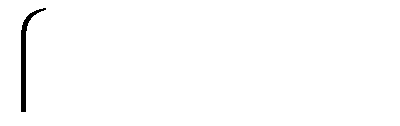
*если t* 1, 4 .

*f X* (*t*)

Случайные величины *Y = FX* (*X*)*,* где *FX* ( *t*) - функция распределения случай- ной величины *Х*, и *Z=* 3 *X 2 -* 2*Y 2 + X Y + Y -* 1 являются функциями от слу- чайной величины *Х*.

*Найти:* а) функцию распределения *FY* ( *t*) случайной величины *Y*; б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 10.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



1/ 2,

0,

*если t* 2,4 ,

*если t* 2,4 .

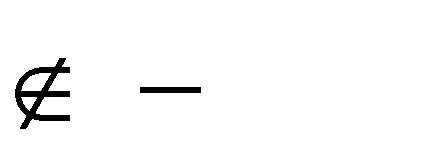
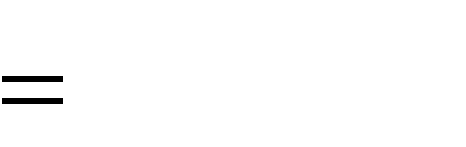
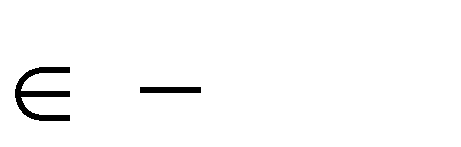
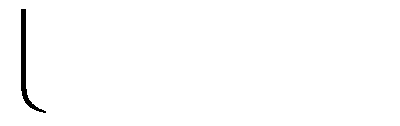
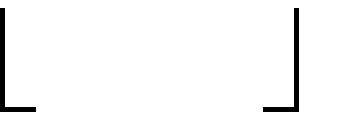
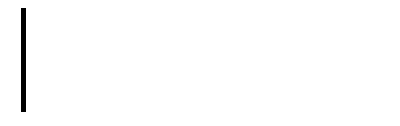
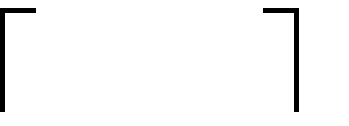
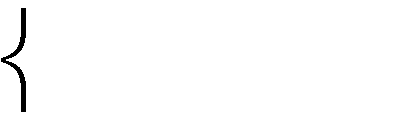
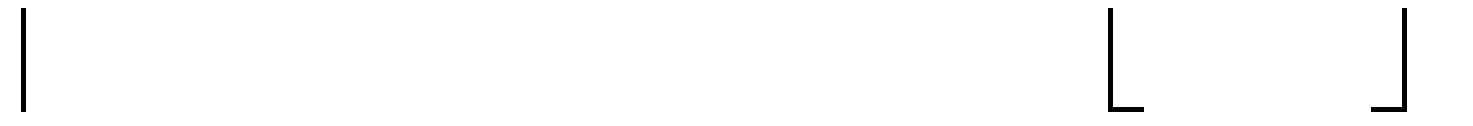
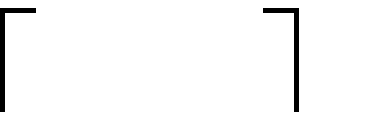
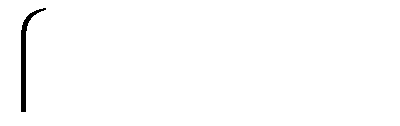
вид:

*f X* (*t*) .

Случайные величины *Y= Х 2* и *Z =* 3 *X -* 1 являются функциями от случайной величины *Х*.

*Найти:* а) функцию распределения *FY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E(Z), D(Z), K(X,Z).*

***Задача 11.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



1/ 2,

0,

*если t* 1, 1 ,

*если t* 1, 1 .

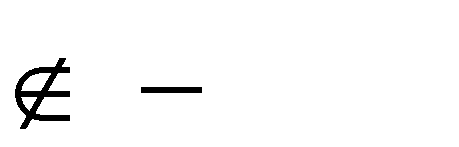
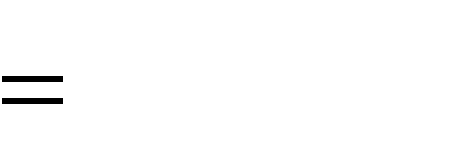
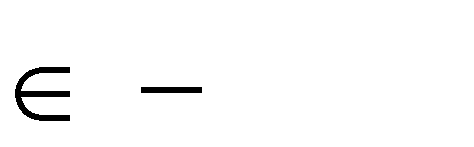
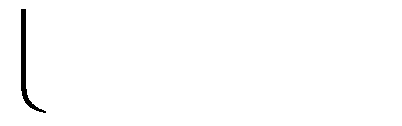
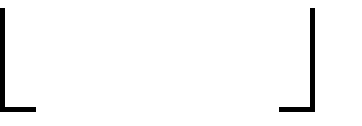
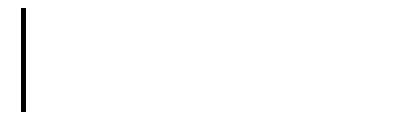
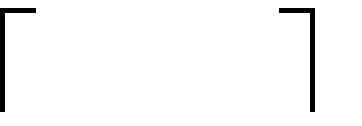
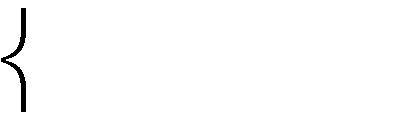
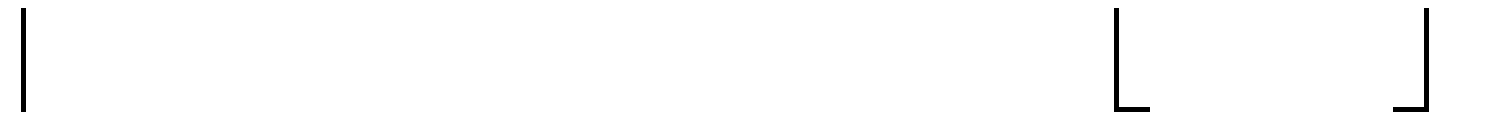
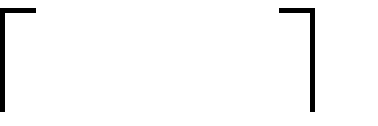
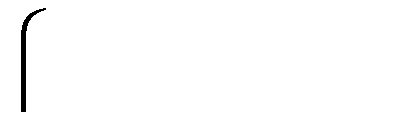
вид:

*f X* (*t*)

Случайные величины *Y = Х 2* и *Z= -* 2 *X +* 3 являются функциями от слу- чайной величины *Х*.

*Найти:* а) функцию распределения *FY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E(Z), D(Z), K(X,Z).*

***Задача 12.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



1/ 4,

0,

*если t* 1, 3 ,

*если t* 1, 3 .

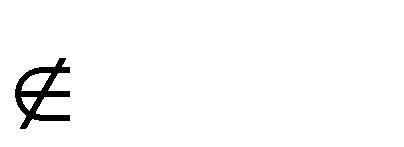
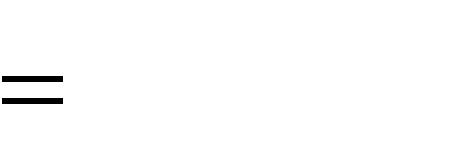
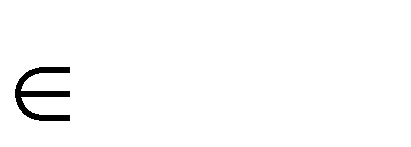
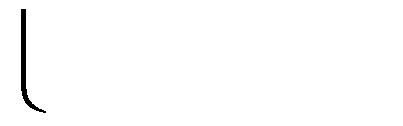
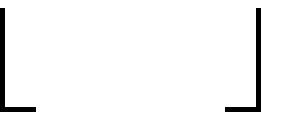
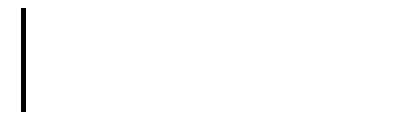
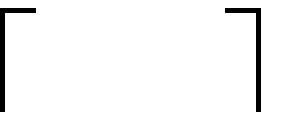
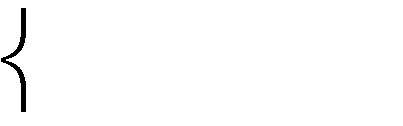
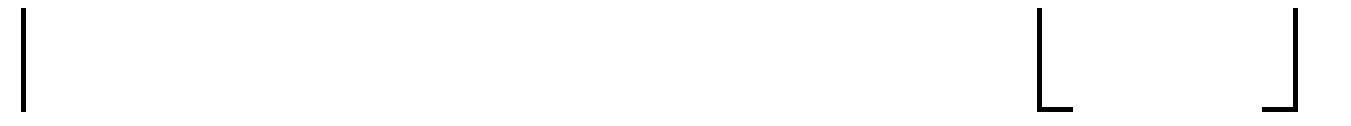
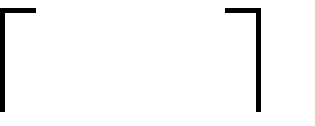
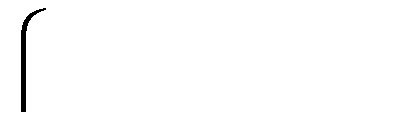
вид:

*f X* (*t*)

Случайные величины *Y = Х 2* и *Z =* 2 *X -* 2 являются функциями от случай- ной величины *Х*.

*Найти:* а) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 13.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



*A*,

0,

*если t* 2, 5 ,

*если t* 2, 5 .

вид:

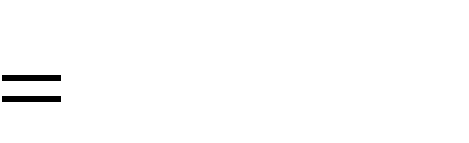
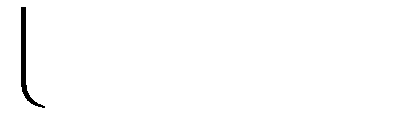
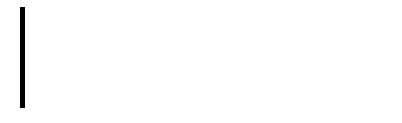
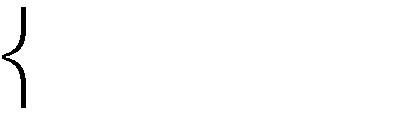
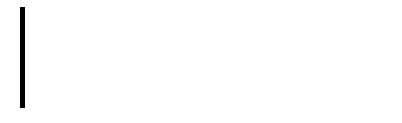
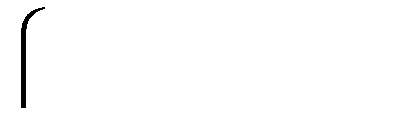
*f X* (*t*)

Случайные величины *Y= 3 Х - 2* и *Z = - X - 3* являются функциями от случай- ной величины *Х*.

*Найти:* а) постоянную *А*;

б) функцию распределения *FY (t)* случайной величины *Y*; в) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 14.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет

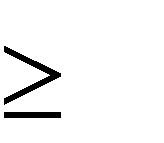


*t* 4

0,

*c* ,

*если t*

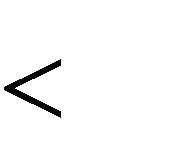


1,

вид:

*f X* (*t*)

*если t*



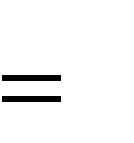
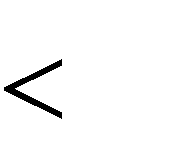
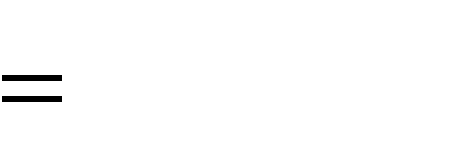
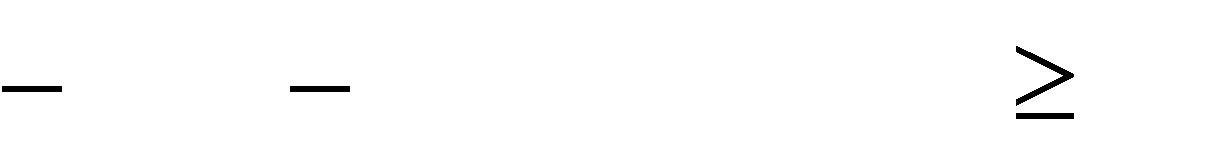
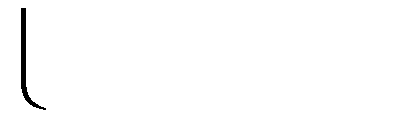
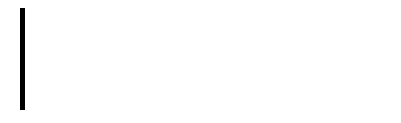
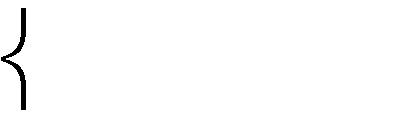
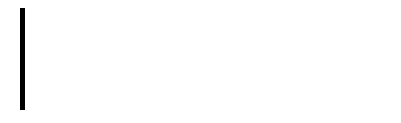
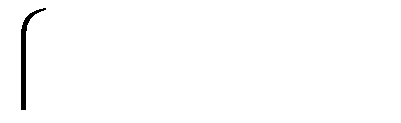
1.

Случайные величины *Y =* ln *X* и *Z =* 2 *X +* 3 являются функциями от случай- ной величины *Х.*

*Найти:* а) постоянную *с*;

б) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*; в) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 15.*** Функция распределения *FX* (*t*) случайной величины *Х* имеет вид:



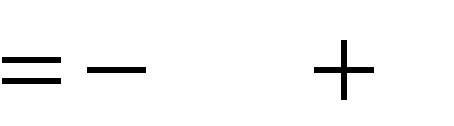
*FX* (*t*)

1 exp( 2*t*),

0,

*если t* 0,

*если t* 0.



2*X* 5

Случайные величины *Y*

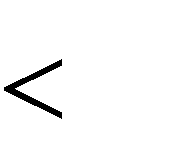
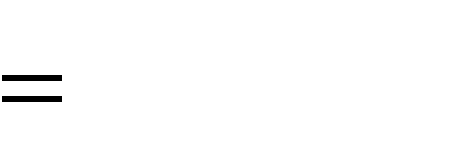
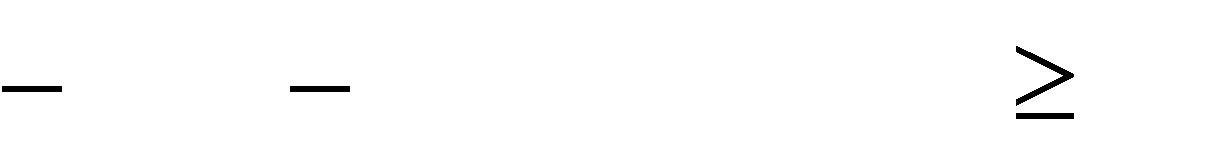
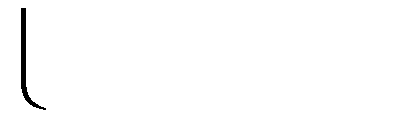
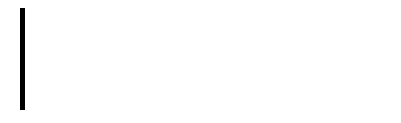
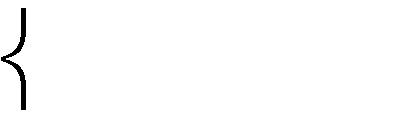
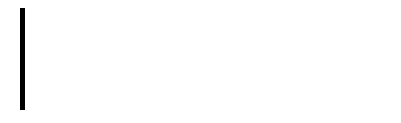
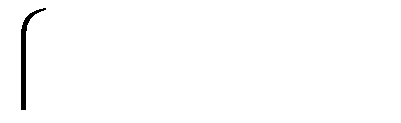
ной величины *Х*.

*X* и *Z*

являются функциями от случай-

*Найти:* a) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 16.*** Функция распределения *FX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



1 exp( 2*t*),

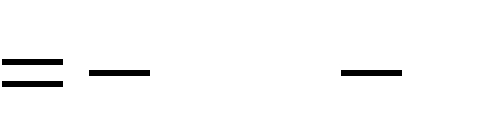
0,

*если t* 0,

*если t*

0.

вид:



4*X* 5

*FX* (*t*)

Случайные величины *Y* и



ln *X* 2

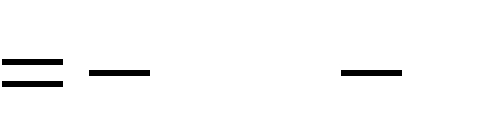
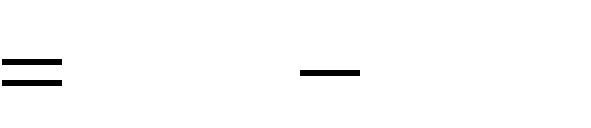
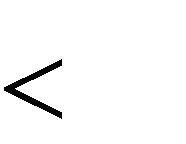
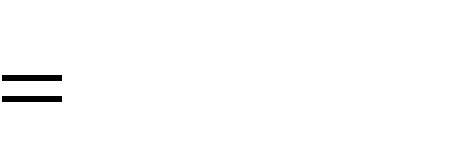
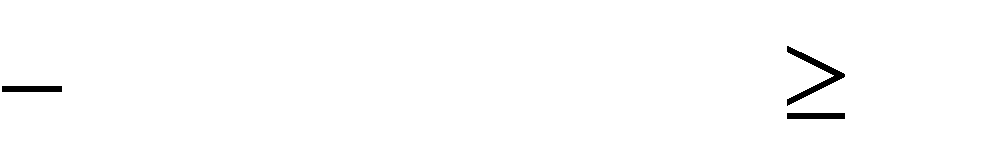
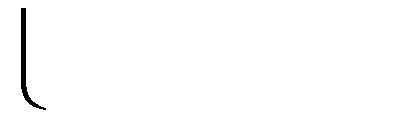
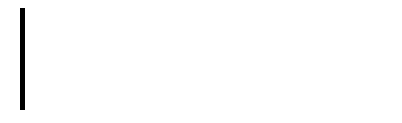
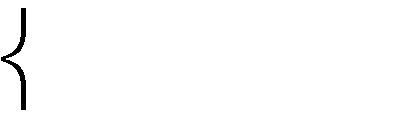
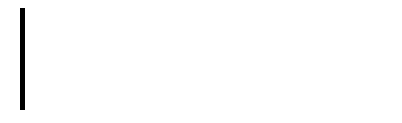
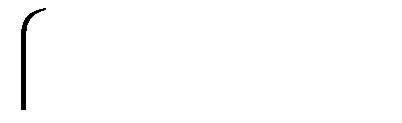
случайной величины *Х*.

*Z*

являются функциями от

*Найти:* a) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 17.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



вид:

2exp( 2*t*),

*f X* (*t*) 0,

*если t* 0,

*если t* 0.

Случайные величины *Y*

случайной величины *Х*.

exp( 2 *X* ) и *Z*

4*X* 3 являются функциями от

*Найти:* a) функцию распределения *FY* (*t*) случайной величины *Y*; б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*)*.*

***Задача 18.*** Функция распределения

*FX* (*t*)

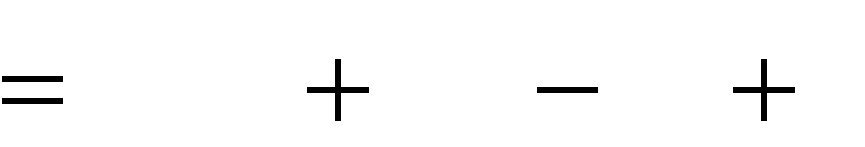
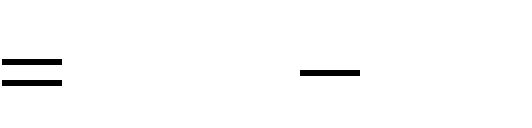
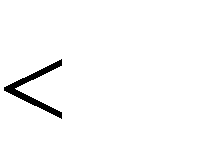
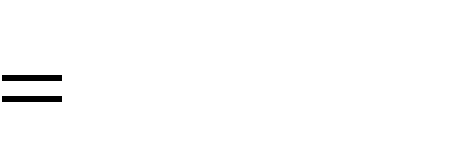
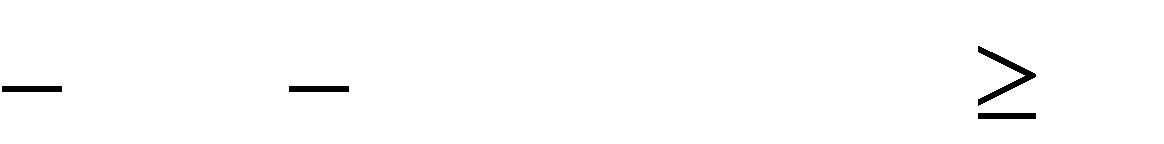
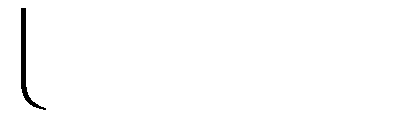
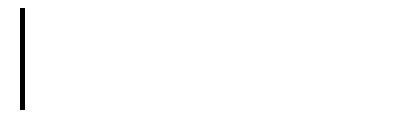
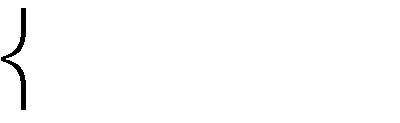
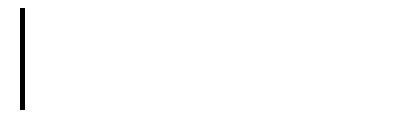
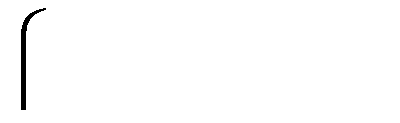
случайной величины *Х* имеет

вид:

*FX* (*t*)

1. exp( 3*t*),

0,



*если t* 0,

*если t* 0.

Случайные величины *Y*

exp(

*X* ) и *Z*

3*X* 2

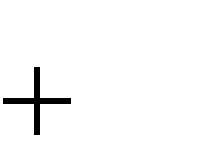
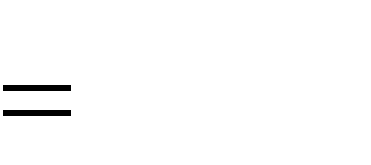
2*Y X*

1. являются функ-

циями от случайной величины *Х*.

*Найти:* a) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*; б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 19.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет



вид:

*f* (*t*)

*c .*

*X* 1 *t*2

Случайная величина *Y =* 1*/X* является функцией от случайной величины *Х*.

*Найти:* а) постоянную с;

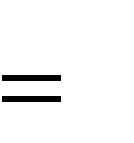
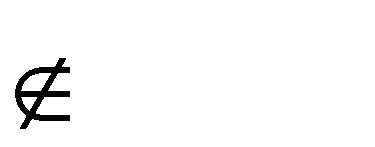
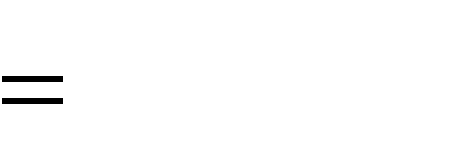
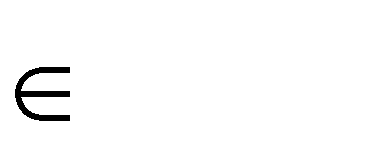
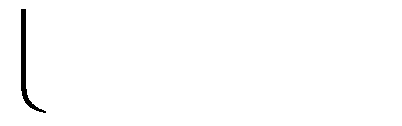
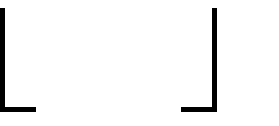
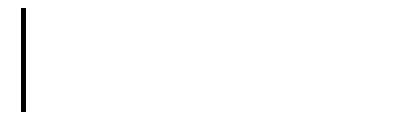
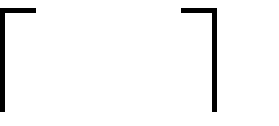
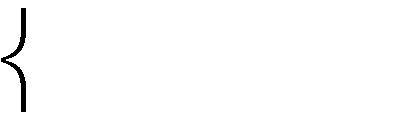
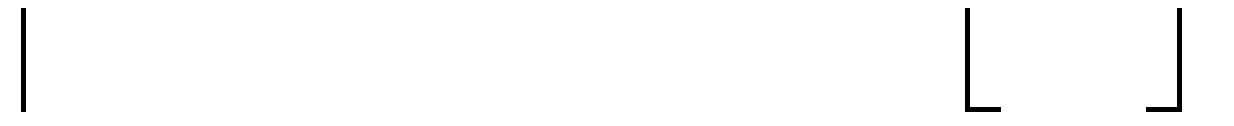
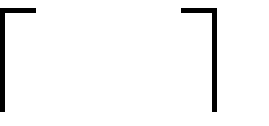
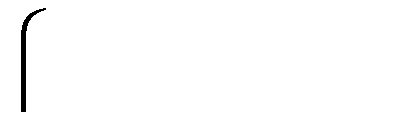
б) плотность распределения *fY* (*t*) случайной величины *Y*.

***Задача 20.*** Плотность распределения *fX* (*t*) случайной величины *Х* имеет

вид:

*a t*2,

*f X* (*t*) 0,



*если t*

*если t*

1, 2 ,

1, 2 .

Случайные величины *Y*

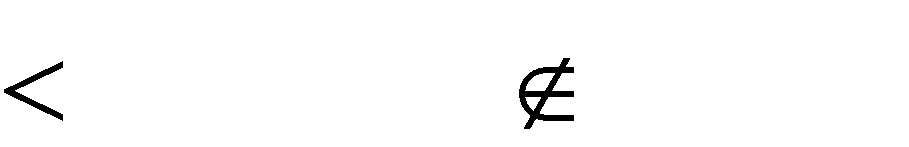
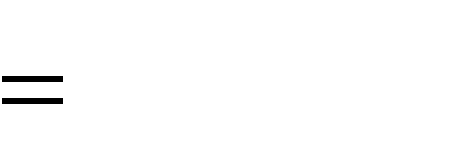
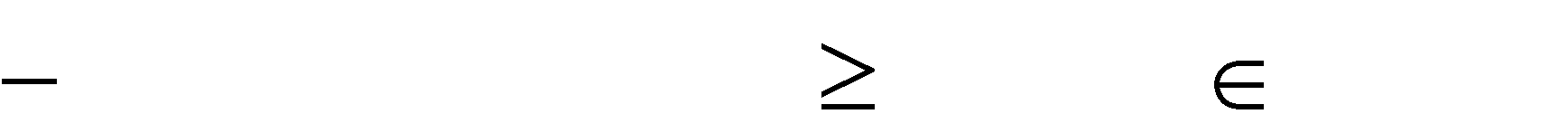
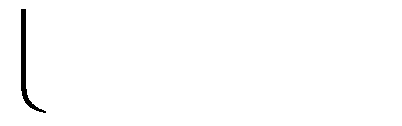
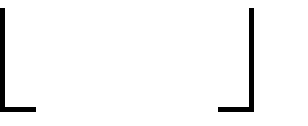
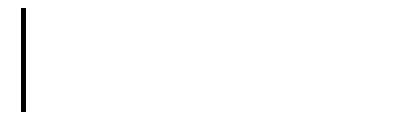
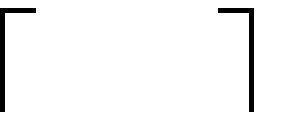
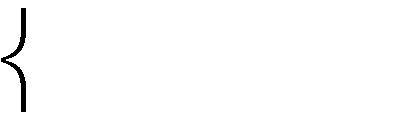
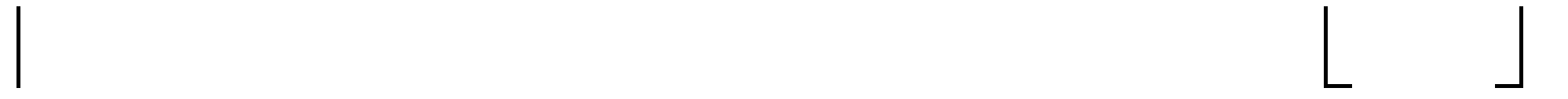
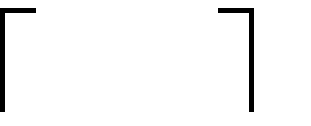
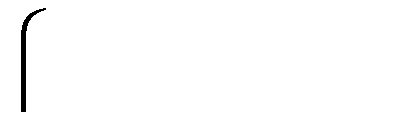
случайной величины *Х*.

*X* и *Z =* 2 *X –*3 *Y* 2 *+* 4 являются функциями от

*Найти:* а) постоянную *a*;

б) функцию распределения *FY* (*t*) случайной величины *Y*; в) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

***Задача 21.*** Плотность распределения *fX,Y* (*x,y*) системы случайных величин



exp( 3*x*),

0,

*если x* 0 *и y*

*если x* 0 *или y*

1, 4 ,

1, 4 .

(*X,Y*) имеет вид:

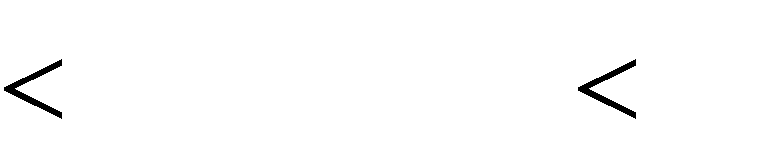
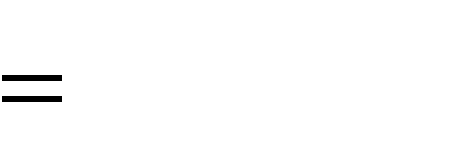
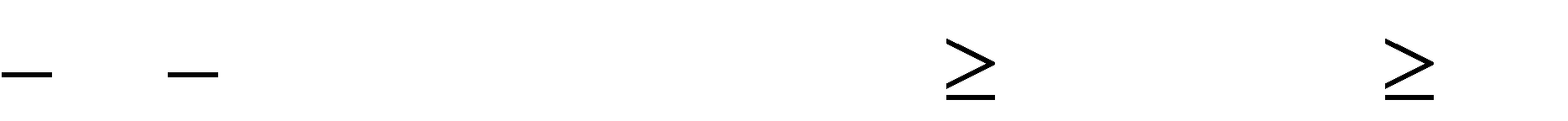
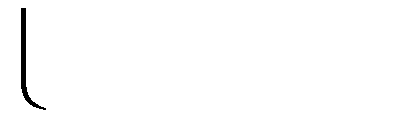
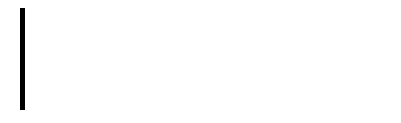
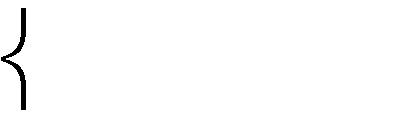
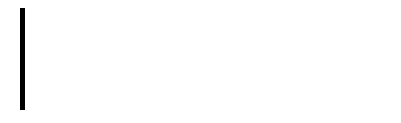
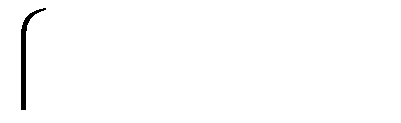
*f X* ,*Y* (*x*, *y*)

Случайные величины *Z =* 2 *Y +* 1 и *T =* 2 *X – Y* / 3 *+* 2 являются функциями от случайных величин *X, Y.*

*Найти:* а) плотность распределения *fZ* (*t*) случайной величины *Z;*

б) дисперсию *D*(*T*)*.*

***Задача 22.*** Плотность распределения *fX,Y* (*x,y*) системы случайных величин



6exp( 2*x* 3*y*),

0,

*если x* 0 *и y* 0,

*если x* 0 *или y*

0.

(*X,Y*) имеет вид:

*f X* ,*Y* (*x*, *y*)

Случайные величины *Z =* 3*Y -* 1 и *T = -* 3 *X +* 2 *Y -* 1 являются функциями от случайных величин *X, Y.*

*Найти:* а) плотность распределения *fZ* (*t*) случайной величины *Z*; б) дисперсию *D*(*T*)*.*

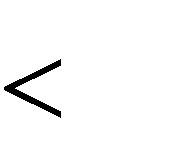
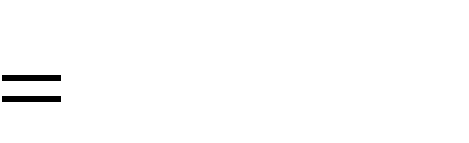
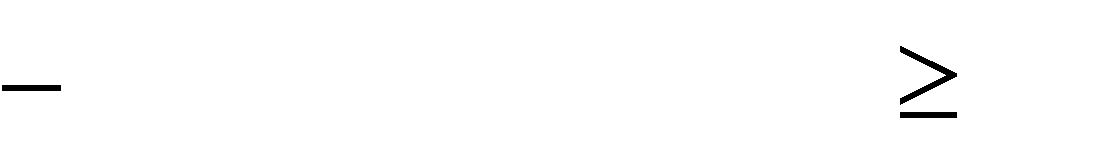
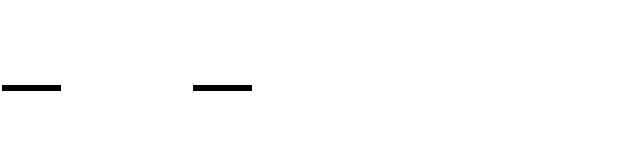
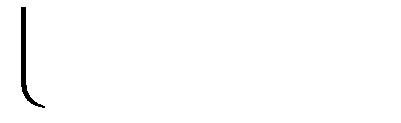
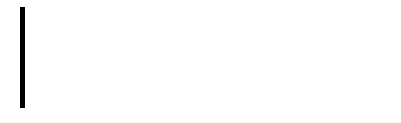
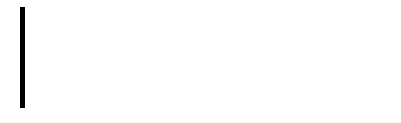
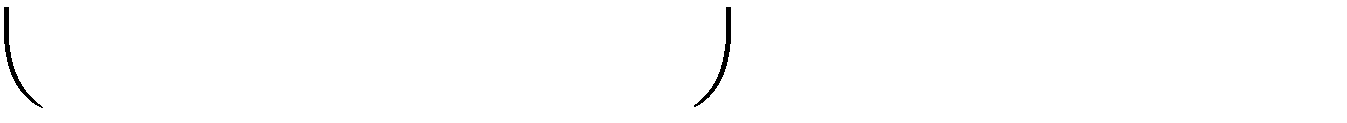
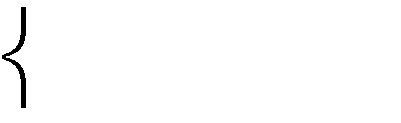
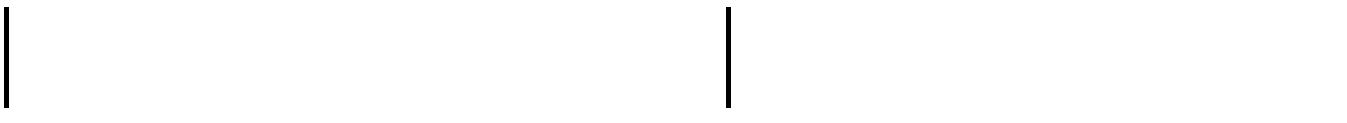
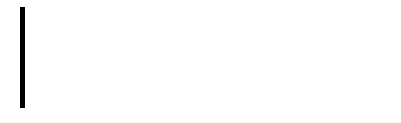
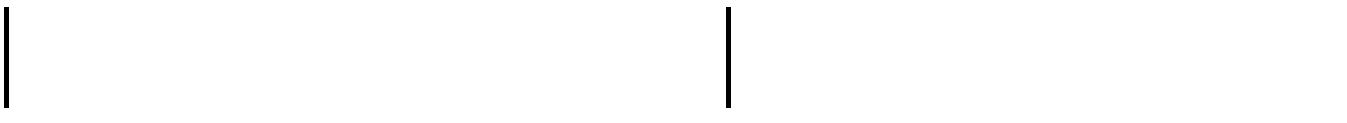
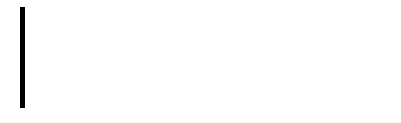
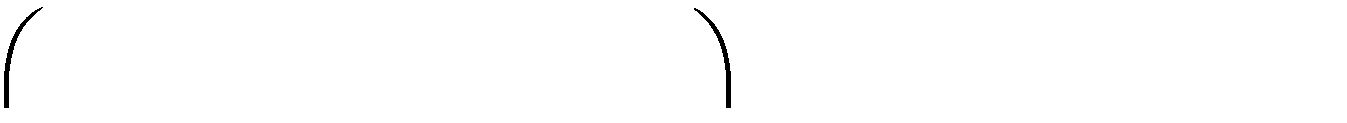
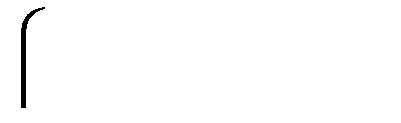
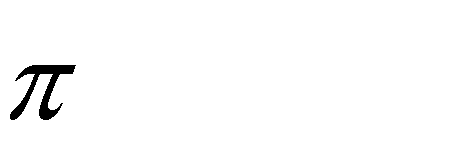
***Задача 23.*** Плотность распределения *fX,Y* (*x,y*) системы случайных величин

(*X,Y*) имеет вид:

*f X* ,*Y* (*x*, *y*)

1. exp

2



0,

(*x* 1)2

2

2 *y* ,

*если y* 0,

*если y* 0.

Случайные величины *Z*

2*X* 1 и

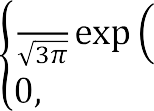
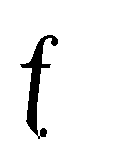
*T X* 2 4*Y*

1. являются функциями

от случайных величин *X, Y.*

*Найти:* а) плотность распределения *fZ* (*t*) случайной величины *Z*; б) дисперсию *D*(*T*)*.*

***Задача 24.*** Плотность распределения *X,Y* (*x,y*) системы случайных величин (*X,Y*) имеет вид: *fX,Y* (*x,y* ) =



Случайные величины *Z = Y -* 2 и *T =* 2*X + Y -* 5 являются функциями от случайных величин *X, Y*.

*Найти:* а) функцию распределения *FZ* (*t*) случайной величины *Z*; б) дисперсию *D*(*T*)*.*

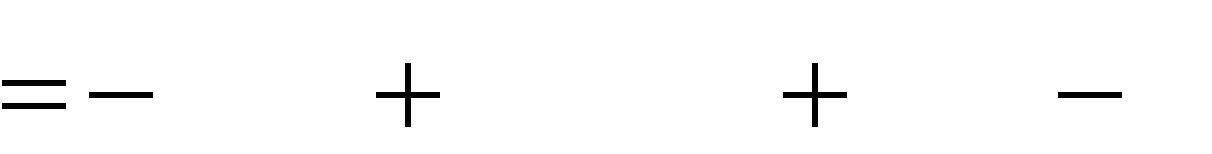
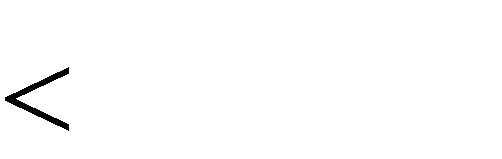
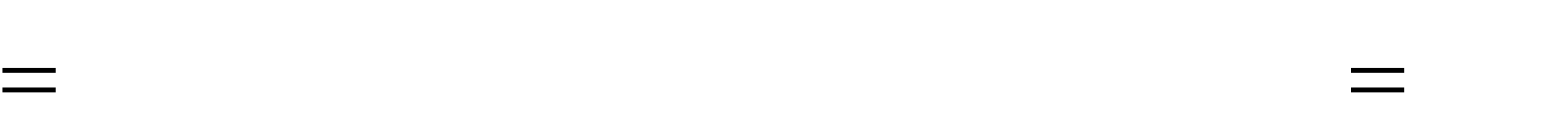
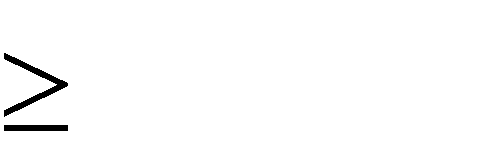
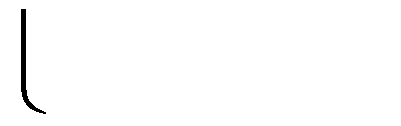
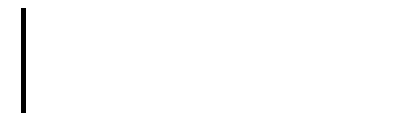
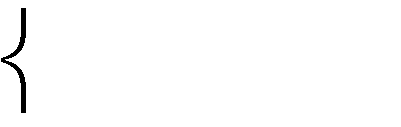
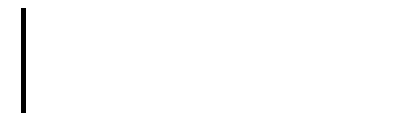
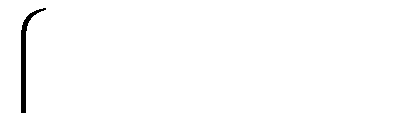
***Задача 25.*** Случайные величины *X*1 и *X*2 независимы и имеют распределе- ние Бернулли, задаваемые рядами распределения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X1* | 0 | 1 |
| *P* | 1/2 | 1/2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X2* | 0 | 1 |
| *P* | 2/3 | 1/3 |

*Найти:* а) закон распределения случайной величины *Y = X*1 *+ X*2; б) математическое ожидание *E*(2*X*12 *+* 3*X*22 *- X*1*X*2 *+* 2*X*2 *-* 4)*.*

***Задача 26.*** Случайные величины *X1* и *X2* независимы и имеют экспоненци- альное распределение, задаваемое плотностью распределения:



*f Xk*

(*t*)

### 3exp(-3*t*), 0,

*если t* 0,

*если t* 0,

*k* 1,2.

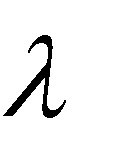
Рассмотрим случайные величины *Y=X*1 *+ X*2 и *Z*

2*X* 2 3*X X* 3*X* 2 .

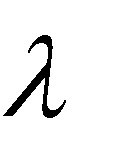
*Найти:* а) плотность распределения *fY* (*t*); б) математическое ожидание *E*(*Z*)*.*

1 1 2 1

***Задача 27.*** Случайные величины *X*1 и *X*2 независимы и имеют распределение



1



2

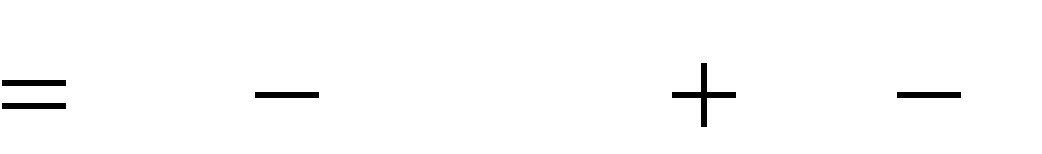
Пуассона с параметрами

= 1 и

= 2.

*Найти:* а) закон распределения случайной величины *Y=X*1 *+ X*2*,*

б) математическое ожидание случайной величины



*Z*

*X* 2

1

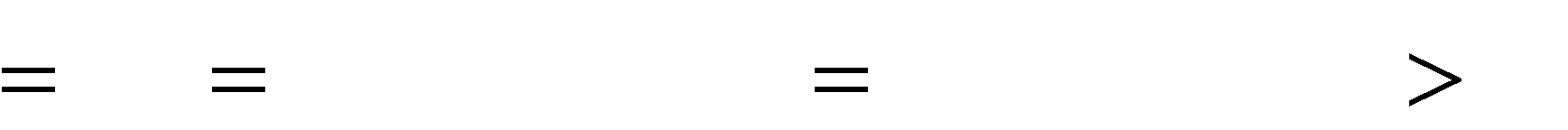
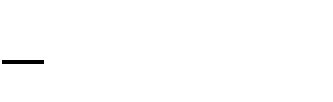
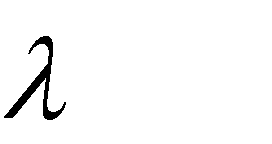
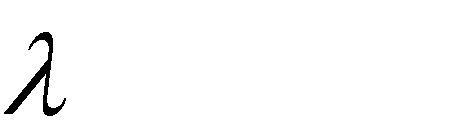
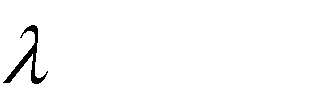
2*X X*

1 2

*X* 3*.*

1

*Напомним, что распределение Пуассона имеет дискретная случайная вели- чина X, принимающая целочисленные значения m=* 0, 1, 2, … *c вероятностями*



*m*)

*m*! *e*

*m*

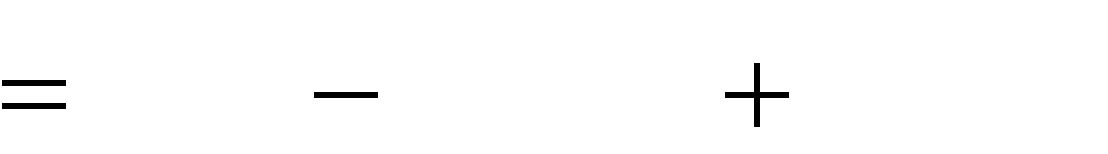
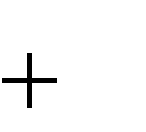
, *m* 0,1, 2,...;

0.

*P*( *X*

***Задача 28.*** Случайные величины *X1* и *Х2* независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

*Найти:* а) закон распределения случайной величины *Y=X*1 *+ X*2 ; б) математическое ожидание случайной величины



*Z* 2*X* 2 5*X X*

1

1 2

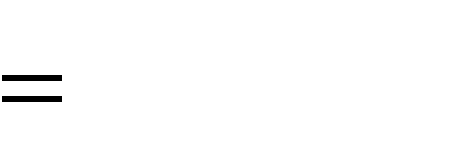
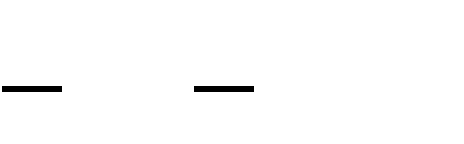
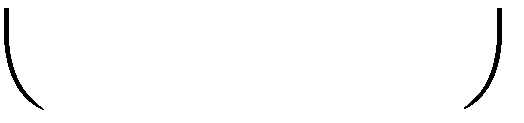
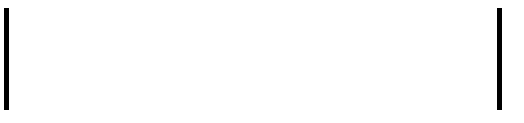
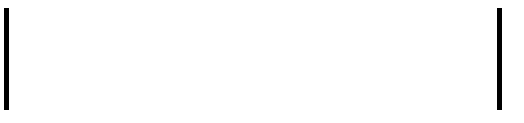
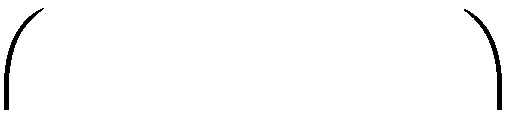
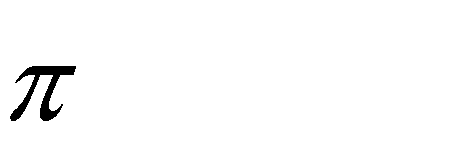
*X*

2

2*.*

***Задача 29.*** *Определить* функции распределения случайных величин *Z*1 = max (*X,Y*) и *Z*2 = min (*X,Y*)*,* где *X* и *Y* независимые случайные величины, имеющие функции распределения *FX* ( *t*) и *FY* (*t*) соответственно.

***Задача 30.*** Плотность распределения *fX,Y* (*x,y*) системы случайных величин



1 еxp

2

*x*2 *y*2

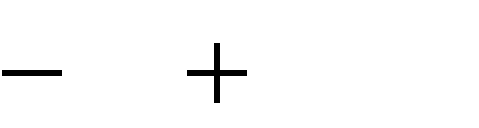
2

(*X,Y*) имеет вид:

*f X* ,*Y* (*x*, *y*)

*Найти:* а) закон распределения полярных координат точки (*X,Y*)*;*

б) дисперсию *D*(



*X* 2*Y* ).

**Типовой расчёт по математической статистике**

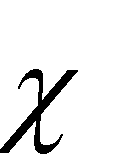
**Тема 1**

**Оценивание, проверка статистических гипотез. Методические указания.**

* 1. Из генеральной совокупности *X* сделана выборка объема *n* = 200. Требу- ется на основании этой выборки сделать аргументированное заключение о за- коне распределения генеральной совокупности и еѐ основных числовых харак- теристиках. Для этого необходимо:

а) найти статистический ряд с числом интервалов, равным, например, 12; б) построить гистограмму;

в) найти статистическую функцию распределения и построить ее график; г) найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

д) найти доверительный интервал для математического ожидания с заданной надѐжностью (доверительной вероятностью);

е) на основании критерия согласия 2 (Пирсона) проверить гипотезу о нор- мальном законе распределения генеральной совокупности.

* 1. По данным таблицы - группированной выборки двумерного вектора

(*X,Y*), требуется найти выборочное уравнение прямой – линии линейной регрес- сии *Y* на *X.*

Каждому студенту преподаватель выдает для обработки выборку объема *n* = 200 из таблицы нормально распределенных случайных чисел и группиро- ванную выборку двумерного вектора в виде таблицы.

Рассмотрим каждый этап выполнения работы.

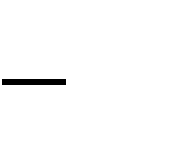
* + 1. **Составление статистического ряда, гистограммы и нахождение то- чечных оценок математического ожидания и дисперсии.**

В заданной выборке находим наименьший *а* и наибольший *b* элементы. Ча-

стное

*b*

12

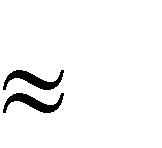


*a*

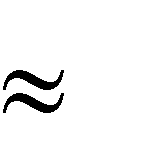
округляем до десятых, и полученное число берем в качестве шага

~

разбиения *h*. Вводим отрезок [*a*~, *b*] , длина которого 12 *h* , причем числа *a*~ и



*b*

~

*b* подобраны так, чтобы *a*~ *a ;*

~

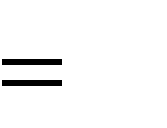
*b*

и, кроме того, чтобы *a*~ и

~

*b* имели не

более двух знаков после запятой для простоты дальнейших вычислений.



*a*~

~ ~

Отрезок [*a*, *b*]

разбиваем точкам

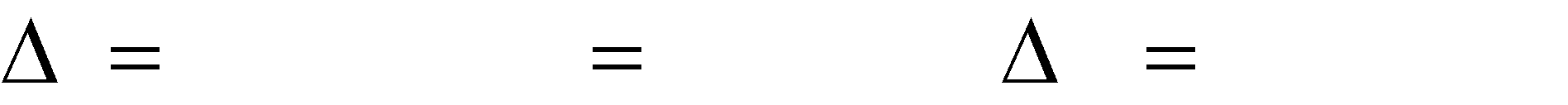
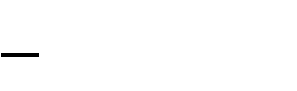
*x*0

, *x*1, *x*2,*…*, *x*12 *=*

~

*b ,* на 12 равных

частичных интервалов затем определяем



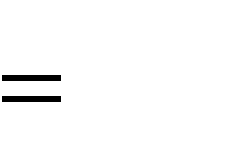
*i*

[*xi* 1, *xi* ), *i* 1,...,11;

12

[*x*11, *x*12 ],

частоты *ni*, то есть число элементов выборки, попавших в каждый из частичных



*ni n*

интервалов Δ*i* и относительные частоты

\*

*i*

*p*

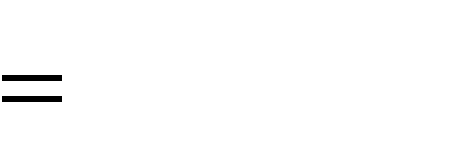
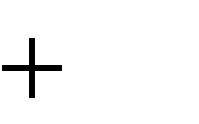
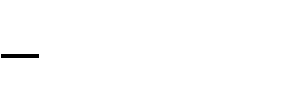
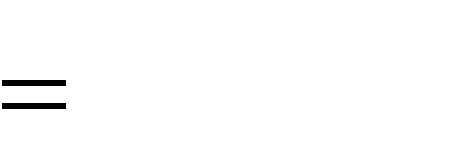
, *i=* 1, …,12.

~

*Примечание*. *Если некоторые элементы выборки не попали на отрезок* [*a*~, *b*]

*, то их условимся относить к ближайшему крайнему интервалу. Числа, совпа- дающие с границами частичных интервалов, условимся относить к левому ин-*

*тервалу. В качестве членов статистического ряда*



*x*\*, *i*

1,2,...,12 *берем чис-*

*ла, являющиеся серединами частичных интервалов:* \*

*i*

*x*

*i*

Результаты оформляются в виде таблицы (табл. 1).

##### *Таблица* 1

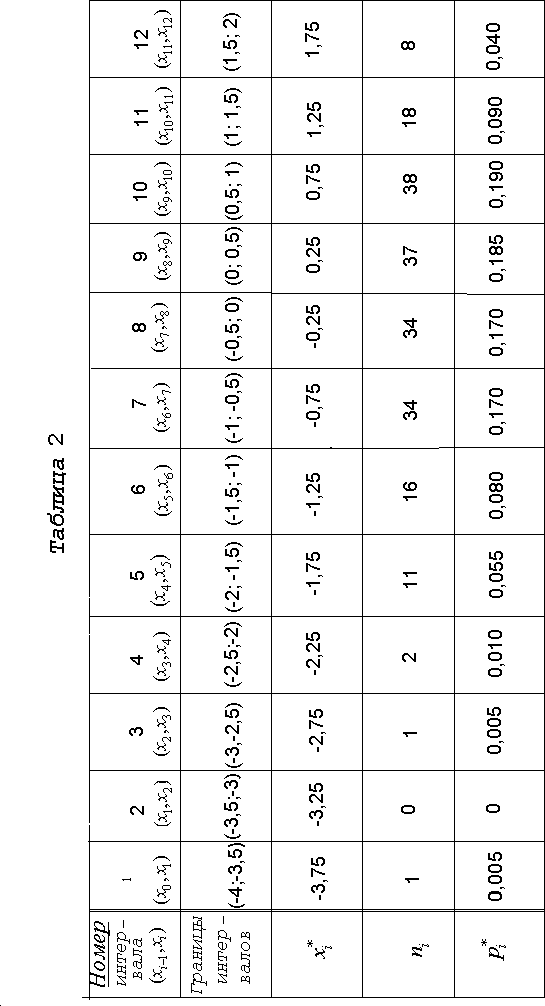
*xi* 1 *xi*

2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Номера интервалов*  (*xi* 1, *xi* ) | 1 | 2 | 3 | … | 12 | *Примечания* |
| *Границы Интервалов* | (*x*0 , *x*1) | (*x*1, *x*2 ) | (*x*2 , *x*3 ) | … | (*x*11, *x*12 ) |  |
| *x*\*  *i* | *x*\*  1 | *x*\*  2 | *x*\*  3 | … | *x*\*  12 |  |
| *ni* | *n*1 | *n*2 | *n*3 | … | *n*12 | 12  *ni* 200  *i* 1 |
| *p*\*  *i* | *p*\* 1 | *p*\*  2 | *p*\*  3 | … | *p*\* 12 | 12  *p* \* 1  *i* 1 *i* |

***Пример.*** Пусть нам дана следующая выборка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -0,669  0,392  -0,337  0,369  -1.694 | 0,035  0,106  0,199  -1,990  0,710 | -2,077  1,430  -0,160  -1,190  -0,655 | 1,077  -0,204  0,625  0,666  -0,546 | 0,525  -0,326  -0,891  -1,614  1,654 | -0,154  0,825  -1,464  0,082  0,134 | -0,537  1,214  1,353  -0,184  -0,529 | -1,036  0,091  0,466  -1,324  -0,915 | 0,882  -0,032  1,000  0,741  -0,898 | -0,402  -1,264  1,511  -0,264  0,799 |
| 0,985  -1,063  0,033  0,597  -1.601 | 0,340  -0,594  -1,527  0,362  -0,570 | 0,276  -1,526  1,422  -3,760  0,133 | 0,911  -0,787  0,308  1,159  -0,660 | -0,170  0,873  0,845  0,874  1,485 | -0 ,551  -0,405  -0,151  -0,794  0, 682 | -0,036  1,469  1,642  -0,358  0,104 | 0,679  -0,318  0,033  0,162  1,215 | -0,432  0,922  -0,838  0,064  0,686 | 0,678  0,522  -0,872  1,594  0,676 |
| -0266  0,901  -1,433  1,327  -0,248 | -1,309  1,531  -1,008  0,703  0,788 | 0,597  -0,889  -0,990  -1,724  0,577 | 0,989  -1,019  0,090  -0,709  0,122 | 0,934  0,084  0,940  -1,100  -0,536 | 1,079  1,531  0,207  -1,346  0,293 | -0,999  0,638  -2,243  0,183  -0,126 | 0,015  1,297  -0,039  -0,163  1,627 | -0,094  -0,139  0,276  1,212  0,658 | -1,920  -0,157  -0,551  -0,452  1,348 |
| -0,401  0,344  0,441  0,824  1,385 | -0,679  0,324  -0,372  0,040  1,320 | 0,921  0,686  -1,336  -1,734  -0,509 | 0,476  -1,487  0,062  0,261  -0,381 | 1,121  -0,136  1,506  0,054  -1,671 | -0,864  0,803  -0,315  -0,379  -0,524 | -0,656  -0,745  1,207  -0,961  1,298 | -0,220  0,932  0,838  -2,716  -1,248 | -1,566  -0,833  -0,304  0,823  0,346 | -0,144  -0,946  0,128  -0,112  -0,805 |

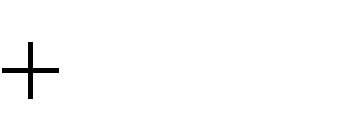
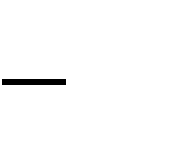


Составляем статистический ряд с 12 интервалами. Наименьший элемент вы-

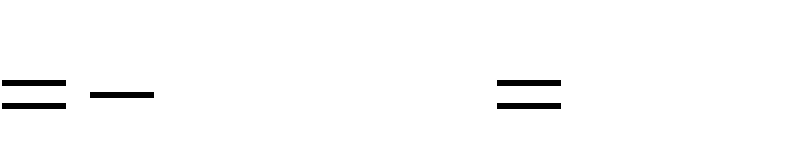
борки *a* **=** -3,760, наибольший *b* **=** 1,654. Частное

*b a =* 1,654 3,760

= 0,451*.*

12 12

Округляя, получаем *h=*0,5.

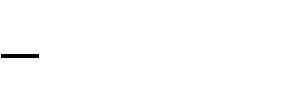


4 и *b*~ 2.

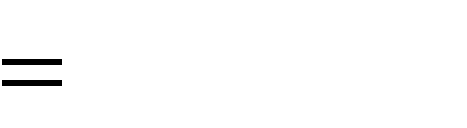
12 *h =* 12 **.** 0,5 = 6. Поэтому удобно взять *a*~

Составляем табл.2.

Построим гистограмму (рис. 1). ***Гистограмма*** представляет собой ступенча- тую фигуру, составленную из прямоугольников, основания которых - частич-



1, *xi* ),



1, 2,...,12

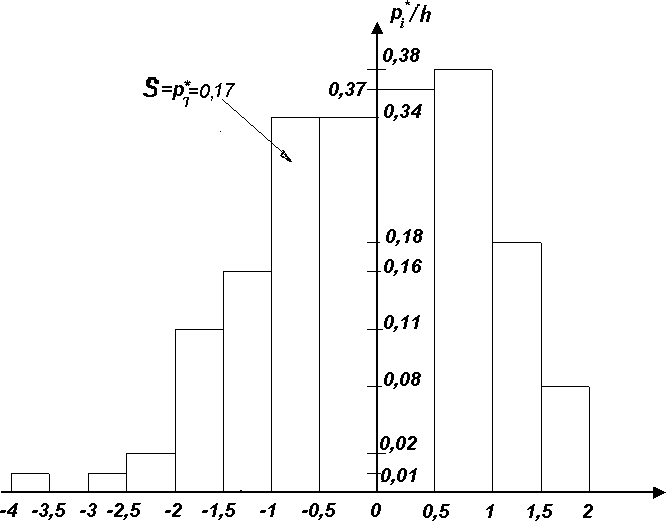
ные интервалы Δi =

[*xi*

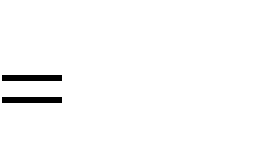
*i* ; расположенные на оси абсцисс, вы-

соты пропорциональны, а площади равны соответствующим частотам (см. по- собие с. 122-126). В нашем примере все эти данные берем из таблицы 2 .

##### *Гистограмма Рис.* 1



Далее строим эмпирическую функцию распределения (см. пособие с. 86-



*nx* ;

*n*

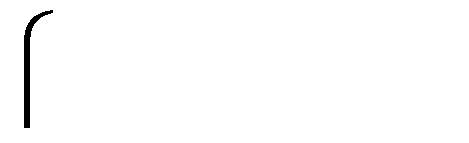
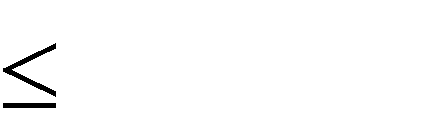
89). Она имеет вид

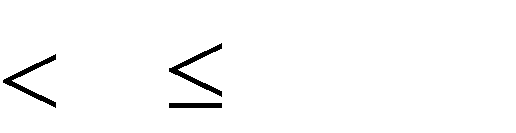
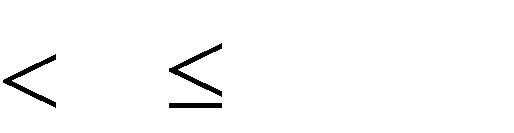
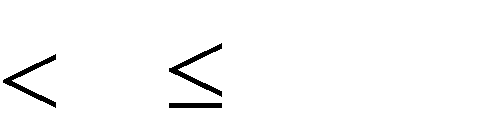
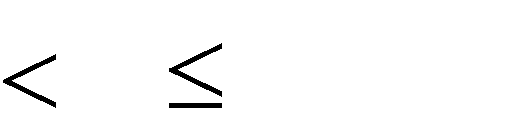
*F*\*(*x*)

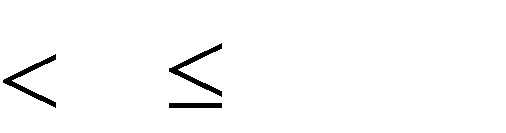
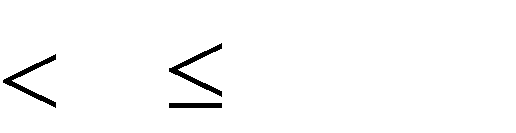
где

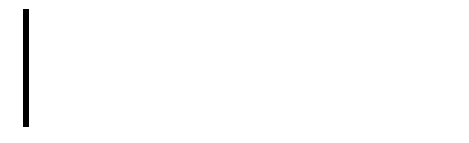
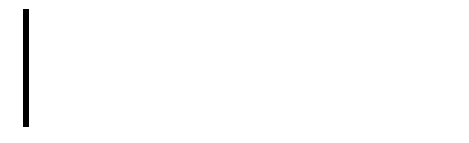
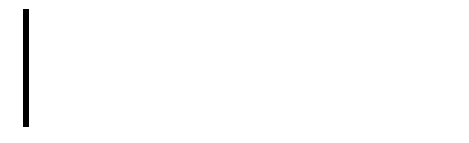
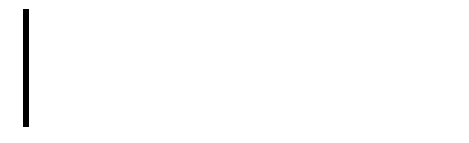
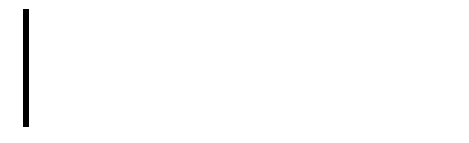
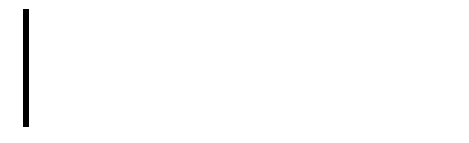
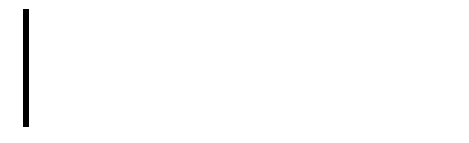
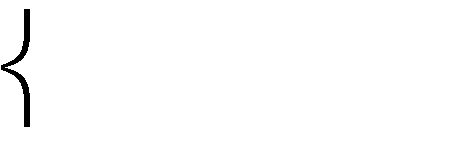
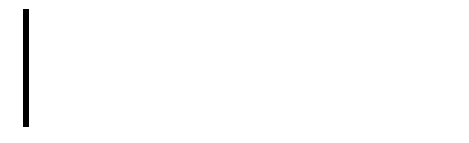
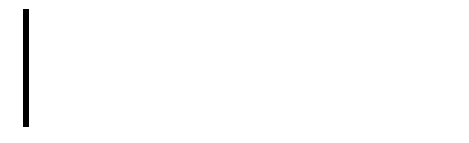
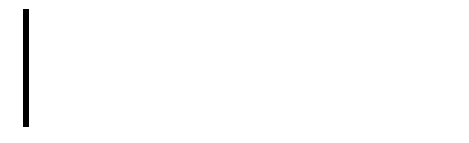
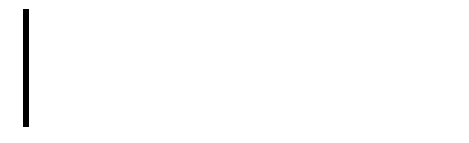
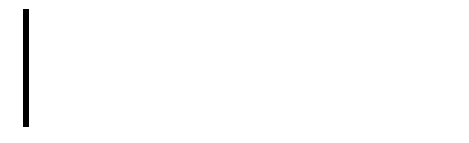
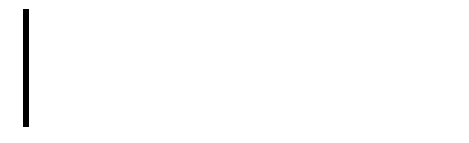
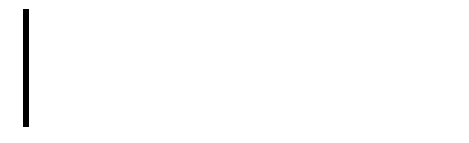
*nx* - число элементов выборки, меньших *х*;

здесь *х* - любое вещественное число. График эмпирической функции распреде- ления представляет собой ступенчатую линию, определенную на всей числовой оси (рис.2). Значения этой функции заключены в промежутке [0,1]. Из таблицы 2 находим

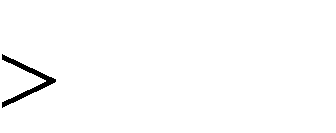
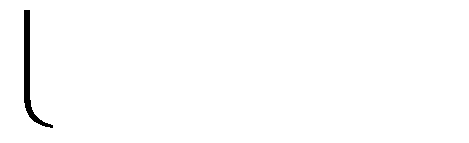
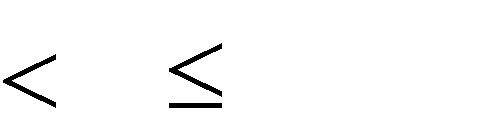
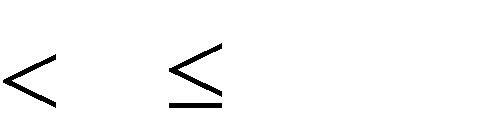
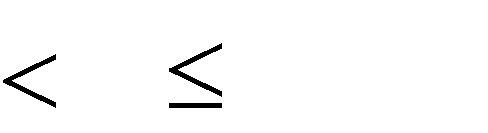
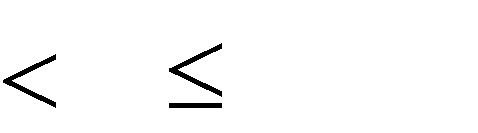
 



*F\*(x)=*

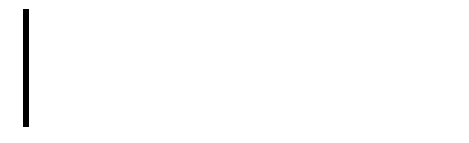


|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0*.*000 | *x* |  | *-* 3*.*75 |
| 0*.*005 | *-* 3*.*75 | *x* | *-*2*.*75 |
| 0*.*010 | *-* 2*.*75 | *x* | *-*2*.*25 |
| 0*.*020 | *-* 2*.*25 | *x* | *-*1*.*75 |
| 0*.*075 | *-* 1*.*75 | *x* | *-*1*.*25 |
| 0*.*155 | *-* 1*.*25 | *x* | *-*0*.*75 |
| 0*.*325 | *-* 0*.*75 | *x* | *-*0*.*25 |
| 0*.*495 | *-* 0*.*25 | *x* | 0*.*25 |
| 0*.*680 | 0*.*25 | *x* | 0*.*75 |
| 0*.*870 | 0*.*75 | *x* | 1*.*25 |
| 0*.*960 | 1*.*25 | *x* | 1*.*75 |
| 1*.*000 |  | *x* | 1*.*75 |



Отсюда график эмпирической функции распределения имеет вид

*F\* ( x )*

1

0.960

0.870

0.680

0.495

0.325

-3.75 -3.25

-2.75 -2.25 -1.75

0.005

-1.25 -0.75 -0.25

0.155

0.075

0.020

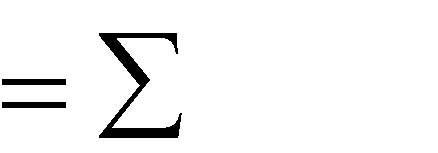
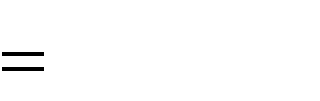
0.010 ***x***

0 0.25 0.75 1.25 1.75

##### *График эмпирической функции распределения* рис.2

Замечание. *Для наглядности, при построении гистограммы и эмпирической функции распределения масштаб по оси абсцисс и оси ординат может быть выбран различным.*

Найдем точечные оценки математического ожидания и дисперсии. В качест-



12

\* \*

*i* 1

*x p*

*i i*

ве таких оценок выбирают среднее выборочное значение

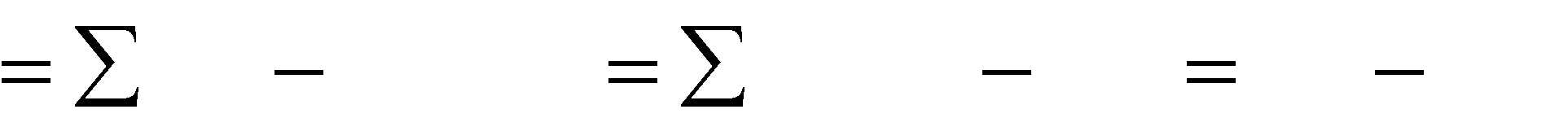
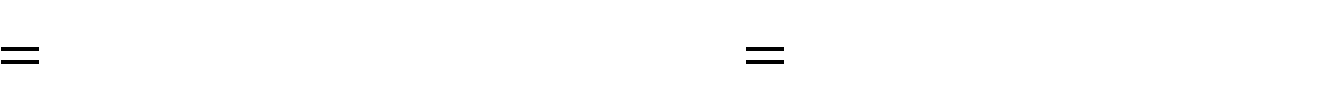
#### *X*

и выбо-

рочную дисперсию *S* 2

12

(*x*\*

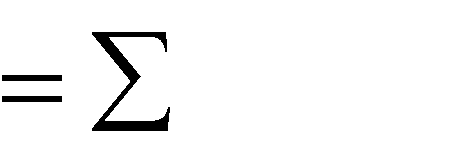
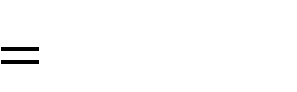


*X* )2 *p*\*

12 *x*\*2 *p*\* *X* 2

1. *X* 2 , где *m*

(см. пособие с.96-99).



12

2

*i* 1

*x*\* *p*\*

*i i*

*i* 1 *i i*

*i* 1 *i i* 2 2

Результаты заносим в таблицу вида 3.

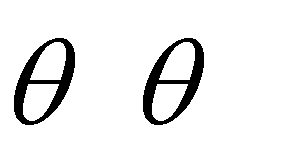
##### *Таблица 3*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер интервала  (*xi* 1, *xi* ) | **1** | **2** | **3** | ... | **12** | Некоторые результаты |
| *x*\*  *i* | *x*\*  1 | *x*\*  2 | *x*\*  3 | ... | *x*\*  12 |  |
| *P*\*  *i* | *P*\*  1 | *P*\*  2 | *P*\*  3 | ... | *P*\*  12 |  |
| *x*\* *p*\*  *i i* | *x*\* *p*\*  1 1 | *x*\* *p*\*  2 2 | *x*\* *p*\*  3 3 | ... | *x*\* *p*\*  12 12 | 12  *X x*\* *p*\*  *i* 1 *i i* |
| *x*\*2 *p*\*  *i i* | *x*\*2 *p*\*  1 1 | *x*\*2 *p*\*  2 2 | *x*\*2 *p*\*  3 3 | ... | *x*\* 2 *p*\*  12 12 | 12 2  *m*2 *x*\* *p*\*  *i* 1 *i i* |

Таблица 3 строится по данным табл.2, затем вычисляются *X* и *S* 2. В нашем примере результаты приведены в табл.4, после ее создания найдены *X* и *S* 2.

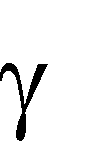
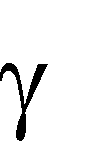
# *Построение доверительного интервала.*

Интервал называется ***доверительным интервалом*** для неизвестного

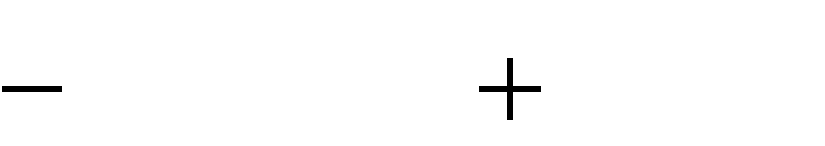
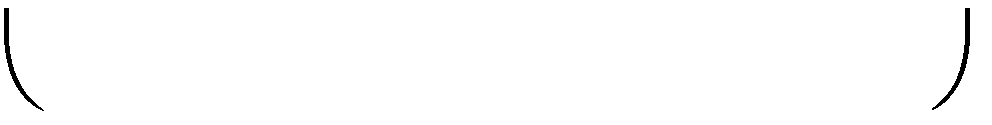
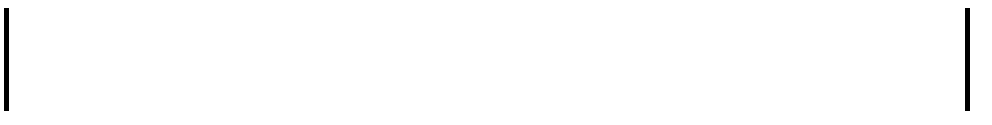
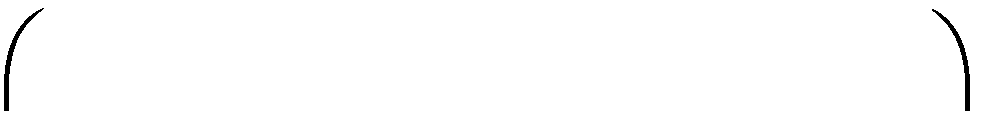


1,

2

параметра *θ,* если, с заданной доверительной вероятностью (надежностью) можно утверждать, что неизвестный параметр находится внутри этого интерва- ла (накрывается интервалом). В данной работе будем искать доверительный интервал для математического ожидания *m* с заданной доверительной вероят- ностью *=* 0,95 (см. пособие с. 108-109).

Ввиду большого объема выборки доверительный интервал имеет вид



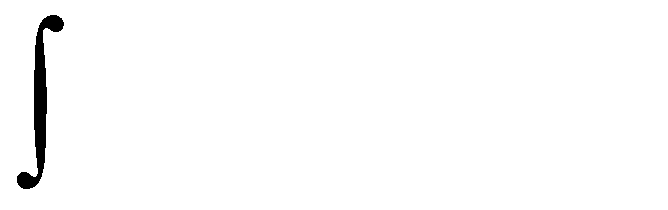
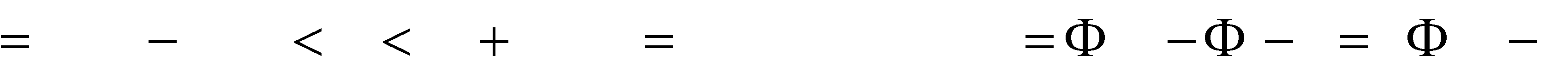
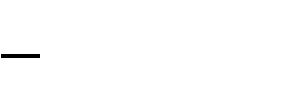
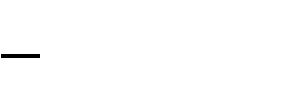
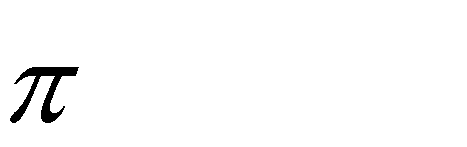
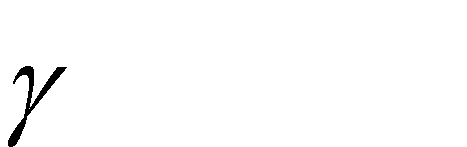
*X t S* , *X*

*n*

*t S*

*n*

. Параметр *t* определяется из равенства



*P*(*X t*

*S*

*n*

*m X*

*t n* )

*S*

1

2

*t*

*e*

*x*2

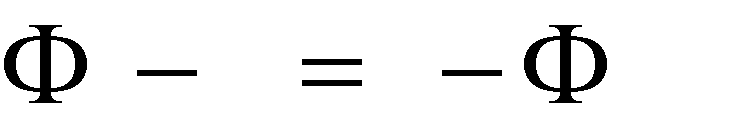
2 *dx*

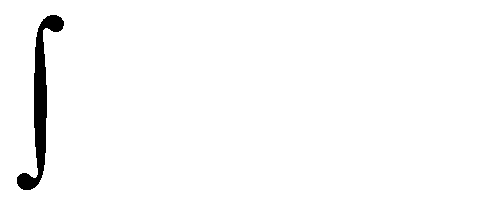
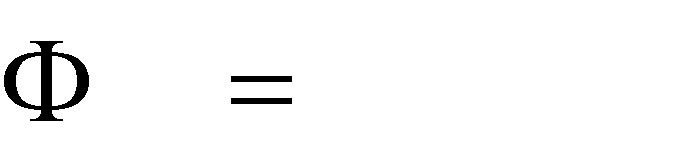
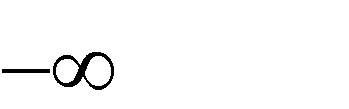
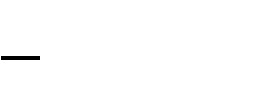
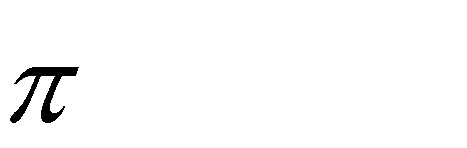
(*t*)

( *t*) 2 (*t*) 1,

*t*

1 *t x*2

где (

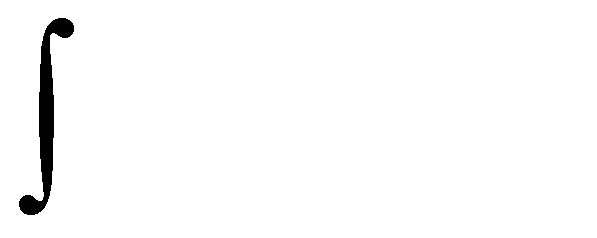
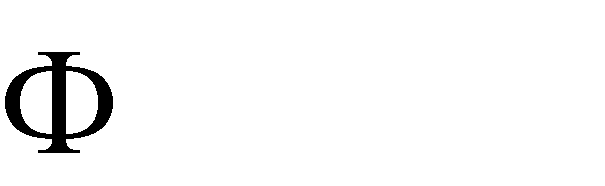
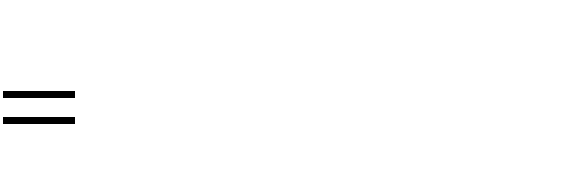
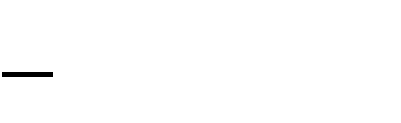
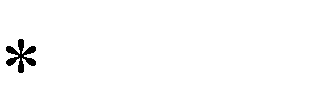
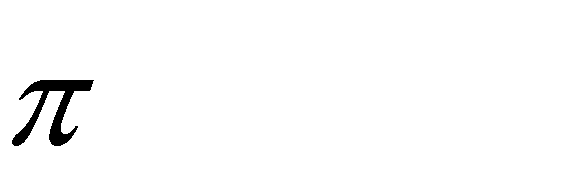


*t*) 1 (*t*) ,

(*t*) 2

e 2 *dx* .

Замечание. *Для определения t при использовании функции Лапласа*



(*t*)

1

2

*t*

e

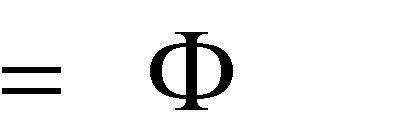
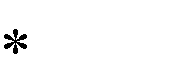
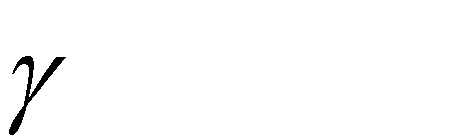
0

*x*2

2

*dx*

*будем иметь следующее уравнение* 2 (*t*) *.*



##### *Таблица 4*

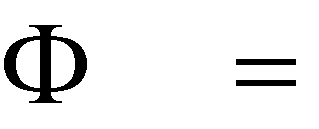
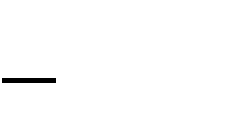
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер интер- вала** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **Неко- торые резуль- таты** |
| *x*\*  *i* | -3,75 | -3,25 | -2,75 | -2,25 | -1,75 | -1,25 | -0,75 | -0,25 | 0,25 | 0,75 | 1,25 | 1,75 |  |
| *p*\*  *i* | 0,005 | 0 | 0,005 | 0,01 | 0,055 | 0,08 | 0,17 | 0,17 | 0,185 | 0,19 | 0,09 | 0,040 |  |
| *x*\* *p*\*  *i i* | -0,019 | 0 | -0,014 | -0,023 | -0,096 | -0,1 | -0,128 | -0,043 | 0,046 | 0,143 | 0,113 | 0,07 | *X* =  - 0,052 |
| *x*\*2 *p*\*  *i i* | 0,070 | 0 | 0,038 | 0,051 | 0,168 | 1/8 | 0,096 | 0,011 | 0,012 | 0,107 | 0,141 | 0,123 | ***m*2** =  0,942 |

*X* = 0,052; *S* 2 ***=*** *m*

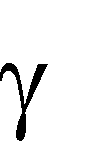
2

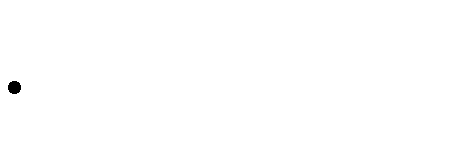
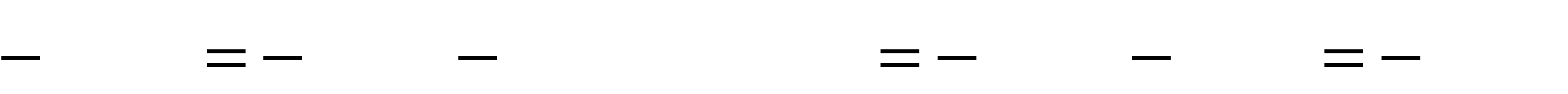
*X* 2 = 0,942 - 0,003 = 0,939

Округляя полученные результаты, принимаем *X* = 0,05; *S* 2 *=* 0,94.



(*t*)

Для рассматриваемого примера будем иметь при = 0,95, откуда *t* =1,95, поэтому в нашем примере имеем



*X*

*t S*

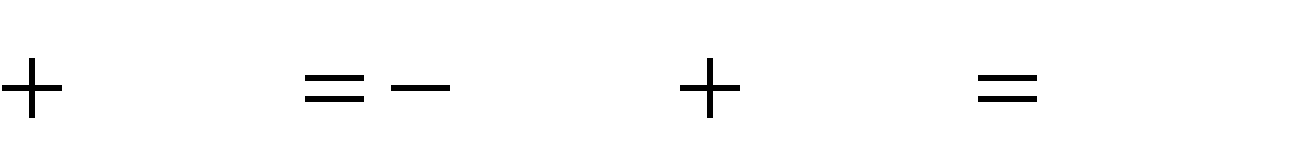
*n*

0*,*05

1*,*95 0*,*97

1*,*41 10

0*,*05 0*,*13 0*,*18 , *X*



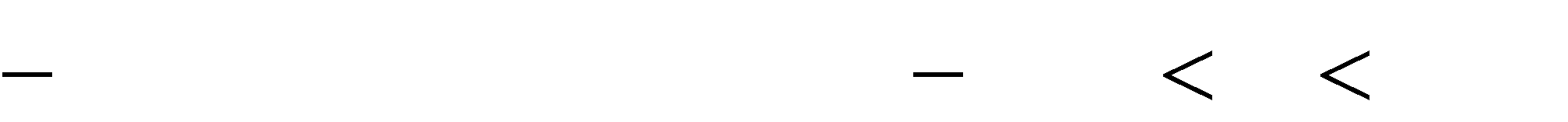
*t S*

*n*

0,05 0,13 0,08.

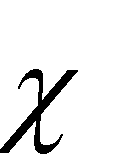
0,975,

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания

имеет вид 0,18; 0,08 , то есть 0,18 *m* 0,08 .

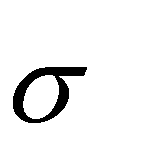
# *Проверка статистических гипотез.*

Проверим гипотезу о том, что генеральная совокупность, из которой произ- ведена выборка, имеет нормальный закон распределения (такое предположение может быть сделано по виду гистограммы). Применим критерий согласия



2

(Пирсона). Так как математическое ожидание *m* и дисперсия генеральной

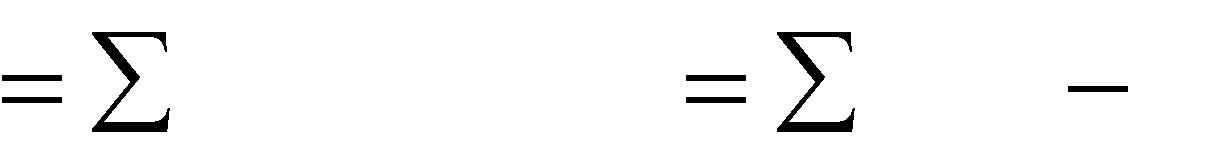
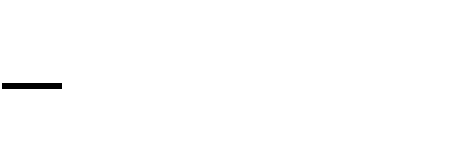
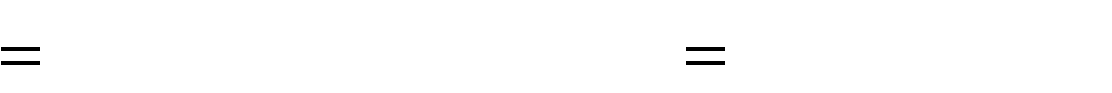
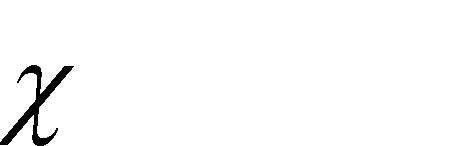
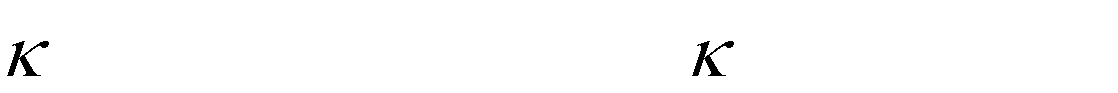
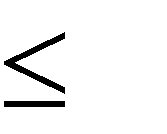


2

совокупности нам неизвестны, то вместо них возьмем их выборочные характе- ристики: выборочное среднее *X* и выборочную дисперсию *S****2***.

Проверка гипотезы сводится к следующему алгоритму.

Объединим в один интервал интервалы с малыми частотами так, чтобы в каждом из интервалов было не менее 6-8 элементов выборки. Обозначим полу- ченное число интервалов буквой *k ( k n* ). Вычислим статистику



2 (*ni*

*i* 1

*npi* )2

*npi*

2

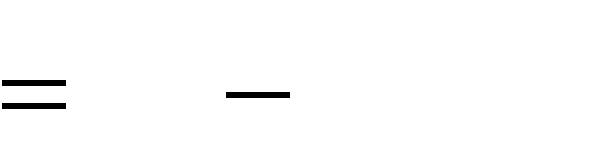
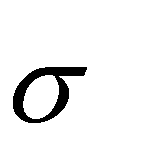
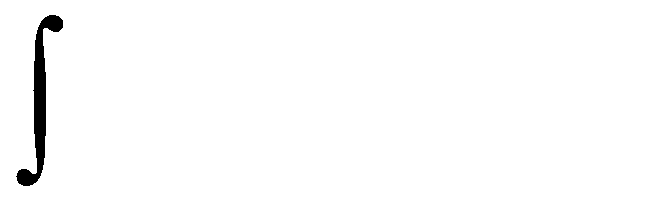
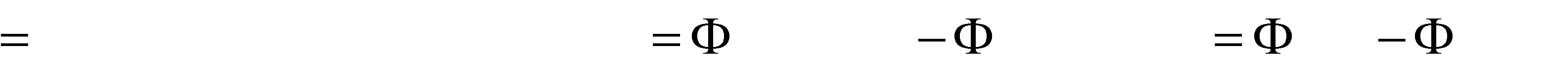
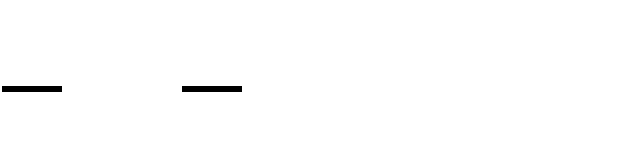
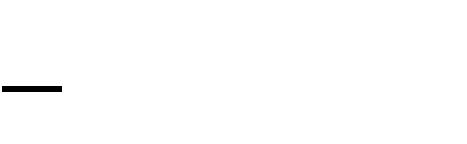
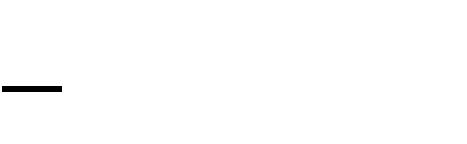
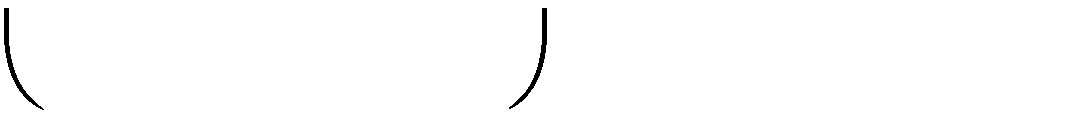
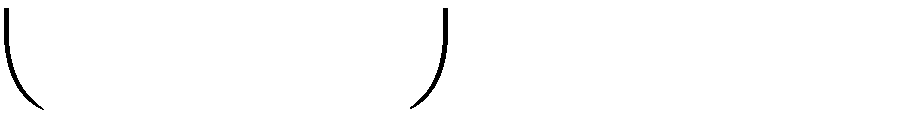
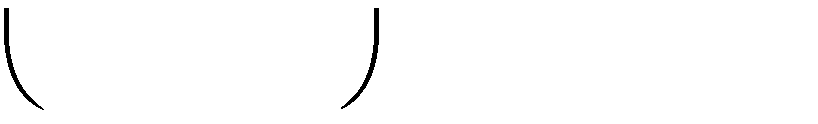
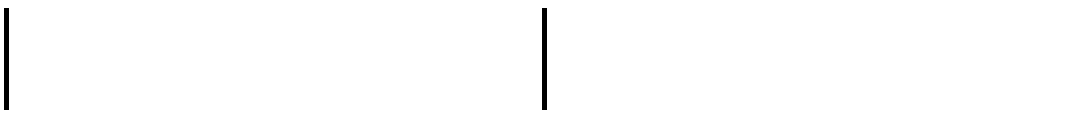
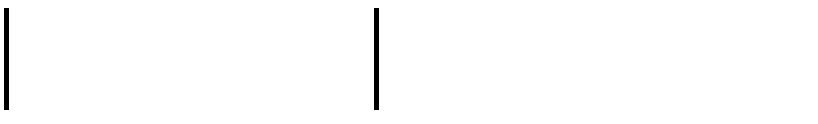
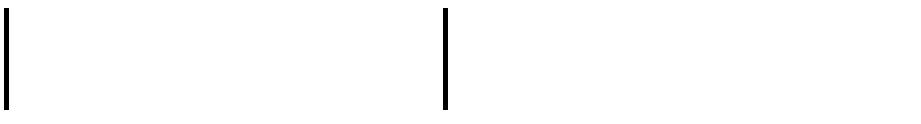
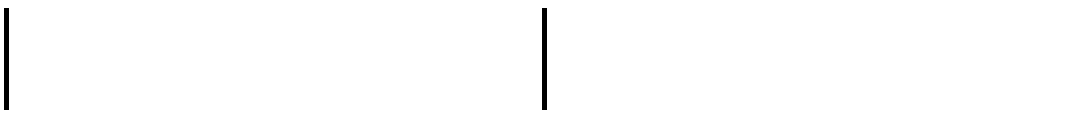
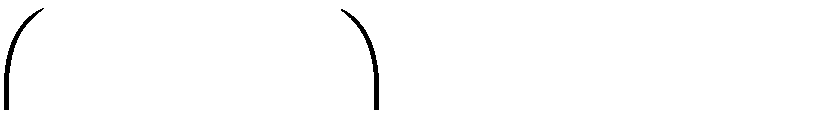
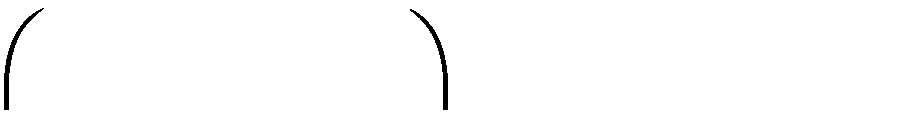
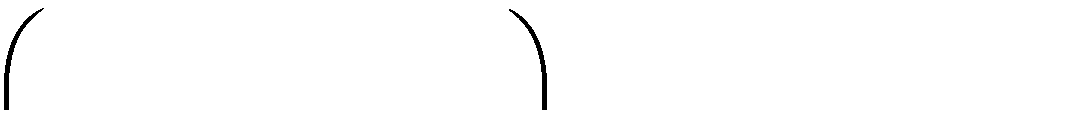
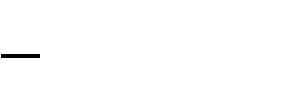
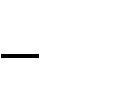
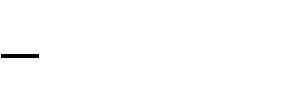
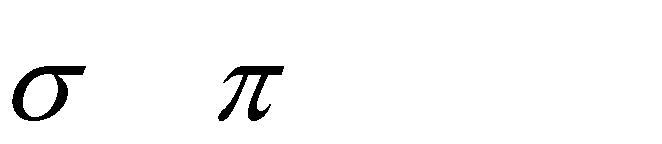
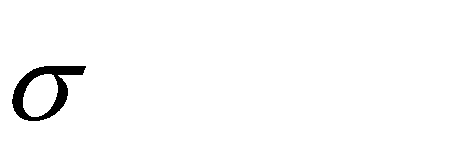
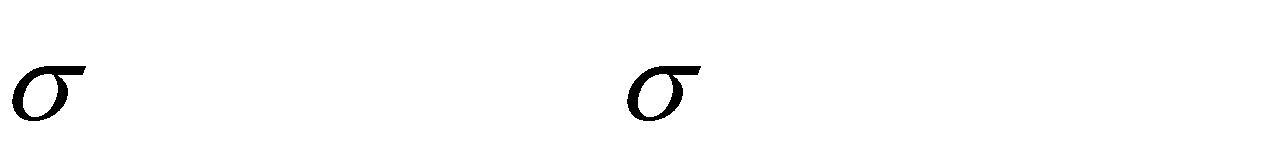
*i n* ***,***

*n*

*i* 1 *npi*

где *n****i*** *-* число элементов выборки в каждом из *k* интервалов; *pi* – теоретичес- кая вероятность попадания случайной величины в *i* -й интервал, которая опре- деляется по формуле

1 *xi*



*p*

*i*

(*x m*)2

*x m x m*

2 *xi* 1

exp 2 2 *dx*

*i i* 1

(*z i*) (*z i* 1)

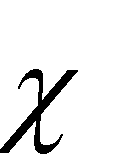
где вместо *m* берем *X* , а вместо 2 = *S 2*, т. е. *zi*

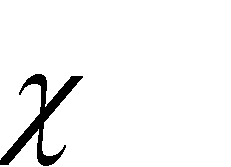
(*xi*

*X* )/ *S* .

Устанавливаем число степеней свободы *r*, которое для нормального закона вычисляем по формуле *r* ***=*** *k -* 3. Назначаем уровень значимости *p =* 0,05.

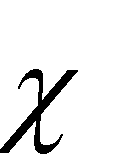
Для заданного уровня значимости *р* и найденного числа степеней свободы *r*

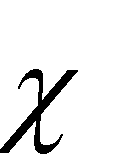
по таблицам 2 ***-распределения Пирсона*** находим значение и сравниваем

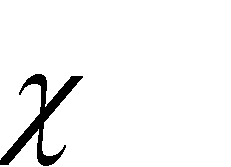


2

***r* ,*p***

между собой это значение и вычисленное значение статистики 2 *.* Если ока-

жется, что 2 ***< ,*** то гипотеза о нормальном распределении не отвергается,

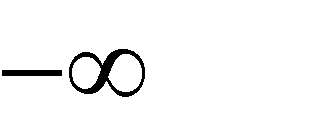


2

***r* ,*p***

то есть экспериментальные данные не противоречат гипотезе о нормальном распределении генеральной совокупности (см. пособие с. 126-129).

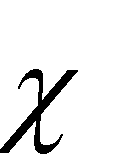
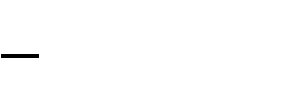
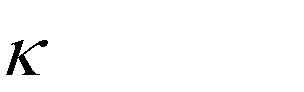
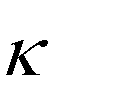
Замечание. *При вычислении теоретических вероятностей*



, *x*1)

*pi крайние ин-*

*тервалы* (*x*0, *x*1) *и* (*x*



1, *x*

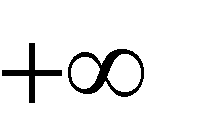
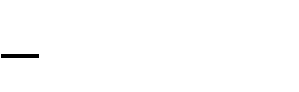
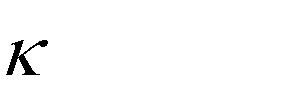
) *заменяются интервалами*

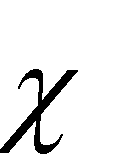
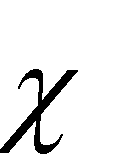
(

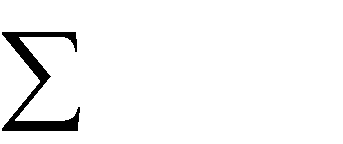
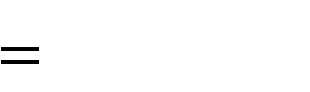
*и* (*x*

1, ) *.*

Применим критерий 2 к рассматриваемому примеру при уровне значимо- сти *p =* 0,05. Результаты вычислений помещены в таблице 5. Из этой таблицы



8 ***n*** 2

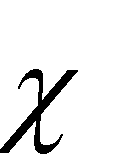
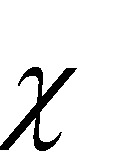


имеем

***i***

***i =*** 209,16; 2 ***=*** 209,16 - 200 = 9,16. По таблице 2 -распределения

1 ***npi***

находим: 2 ***=*** 11,07. Так как полученное нами значение 2 ***=*** 9,16 < 11,07, то ги- потеза о нормальном распределении генеральной совокупности не отвергается.

*p*

**Тема 2**

**Ковариация и регрессия. Построение выборочного уравнения линии регрессии. Методические указания.**

В приложениях часто требуется оценить характер зависимости между на- блюдѐнными переменными. Основная задача при этом состоит в выравнивании (сглаживании) экспериментальных данных с помощью специально подобран- ных кривых, называемых линиями или поверхностями регрессии, которые с большей или меньшей надѐжностью характеризуют корреляционную зависи- мость между наблюдаемыми переменными.

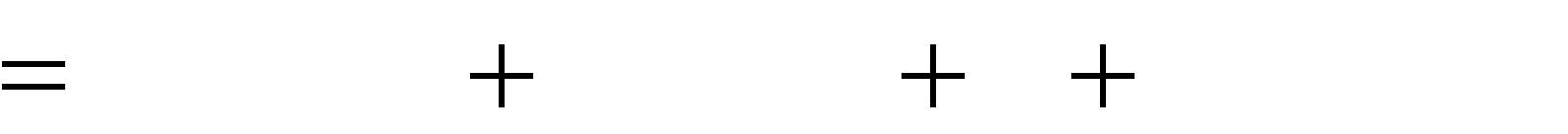
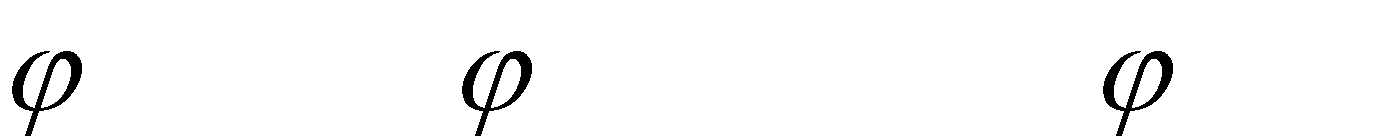
Пусть (*X,Y*) – двумерный случайный вектор, где случайные величины *X* и *Y* являются зависимыми. Зависимость *y*(*x*) математического ожидания *Y* от значе- ния *x* случайной величины *X* есть функция регрессии *Y* на *X*: *E*(*Y/X=x*)*=y*(*x*).

Можно показать, что случайная величина *y*(*X*), где *y*(*x*) *-* функция регрессии *Y* на *X,* является наилучшим в среднеквадратичном приближением случайной ве- личины *Y* функциями от случайной величины *X*, т.е. математическое ожидание *E*(*Y – f* (*X*))2 минимально при *f* (*x*)*=y*(*x*).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Таблица 5. X*** *= -0.05; S****2*** = *0,97* | | | | | | | | | | | | | |
| ***Интер- валы*** | (- ;  -3,5) | (-3,5;  -3) | (-3;  -2,5) | (-2,5;  -2) | (-2;  -1,5) | (-1,5-1) | (-1;  -0,5) | (-0,5;0) | (0;0,5) | ( 0,5;1) | (1;1,5) | (1,5;  + ) | Приме- чания |
| ***Z i*** | -3,56 | -3,04 | -2,53 | -2,01 | -1,49 | -0,98 | -0,46 | 0,05 | 0,57 | 1,08 | 1,60 | + |  |
| ***Ф(Z i)*** | 0,0002 | 0,0014 | 0,0062 | 0,0228 | 0,0668 | 0,1587 | 0,3085 | 0,5398 | 0,7257 | 0,8643 | 0,9452 | 1,0000 |  |
| ***pi*** | 0,0002 | 0,0012 | 0,0048 | 0,0166 | 0,0440 | 0,0919 | 0,1498 | 0,2313 | 0,1859 | 0,1386 | 0,0809 | 0,0548 | = 1 |
| = 0,0666 | | | | |
| ***ni*** | 1 | 0 | 1 | 2 | 11 | 16 | 34 | 34 | 37 | 38 | 18 | 8 | = 200 |
| = 15 | | | | |
| ***ni 2*** | = 225 | | | | | 256 | 1156 | 1156 | 1369 | 1444 | 324 | 64 |  |
| ***npi*** | 13,32 | | | | | 18,38 | 29,96 | 46,26 | 37,18 | 27,72 | 16,18 | 10,96 | = 200 |
| ***ni 2/npi*** | 16,89 | | | | | 13,93 | 38,58 | 24,99 | 36,82 | 52,09 | 20,02 | 5,84 | = 209.16 |

46

В качестве оценки функции *y*(*x*) выбирают, как правило, функции, линейно за- висящие от неизвестных параметров, т.е. функцию регрессии ищут в виде:

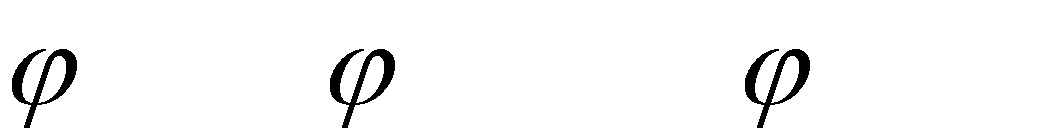


*y*(*x*)

*a*0 0(*x*)

*a*1 1(*x*) ...

*am m*(*x*) ,

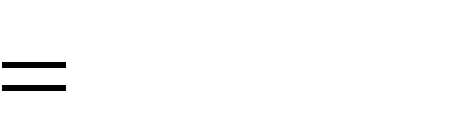
где 0(*x*),

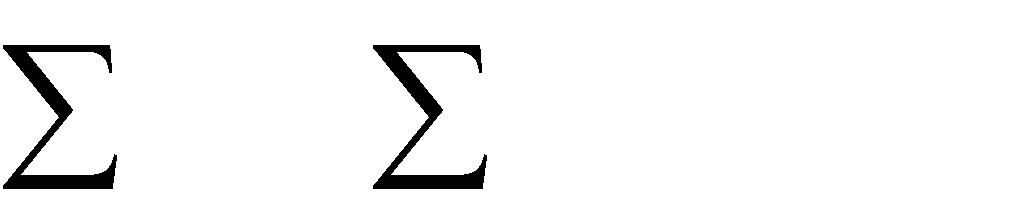
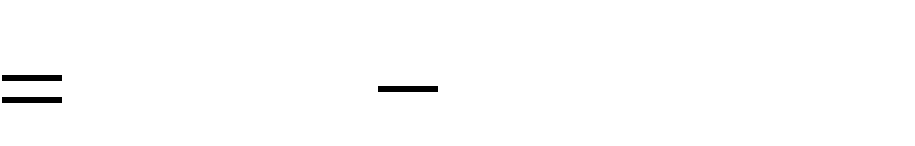
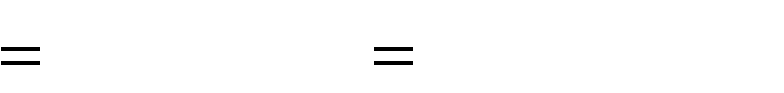
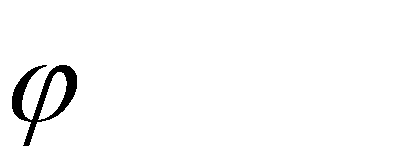
1(*x*),...,

*m*(*x*) - известные функции,

*a*0, *a*1,..., *am* - подлежащие оценке

параметры. Для оценки параметров *a*0, *a*1,..., *am* по выборке (*xi,yi*)*, i=*1*,* 2*,…, n*

используют метод наименьших квадратов. При этом оценка *a*⇀ находится как вектор, минимизирующий сумму



*n*

*m*

*i* 1

( *yi*

*j* 0

*aj j* (*xi* ))2

→

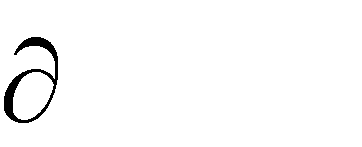
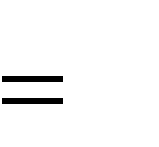
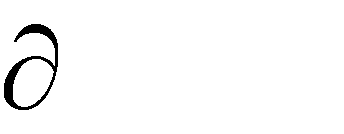
.

*S*(*a*)

(*a*0,*a*1,...,*am*)

Необходимым (а в данном случае и достаточным) условием минимума функции

*S* является выполнение равенств

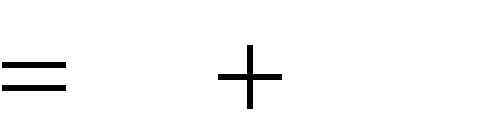


*S aj*

0 ,

*j=*1*,* 2*, ... , n*,

которые приводят к системе уравнений, линейных относительно

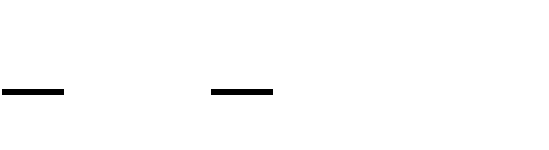
*a*0, *a*1,..., *am* .

Простейшей функцией регрессии является линейная функция

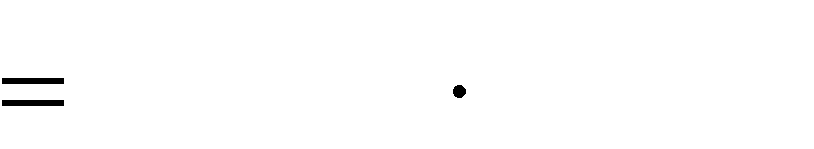
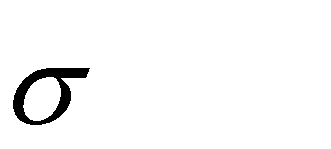
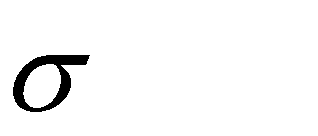
*y*(*x*)

*a*0 *a*1 *x* .

В этом случае решение задачи min *E*(*Y* имеет вид

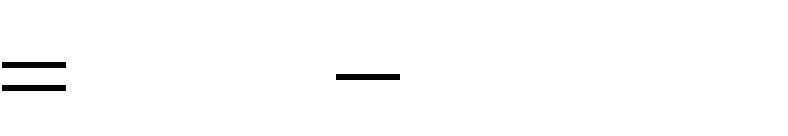


*a*0 *a*1 *x*)2

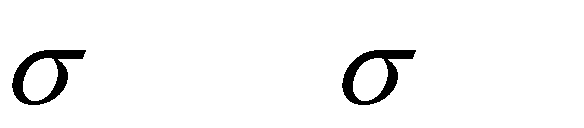


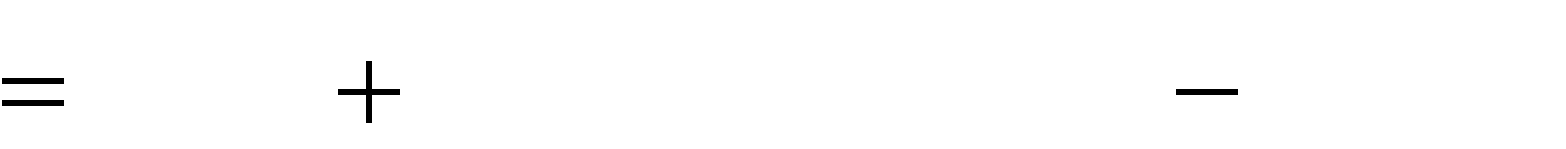
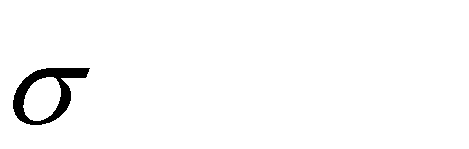
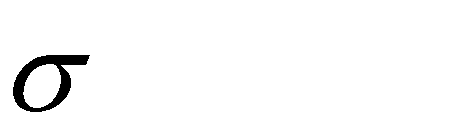
*r*(*X* ,*Y* ) (*Y* ) ,

(*X* )

*a a E*(*Y*) *a E*(*X* ) ,

1 0 1

где *r*(*X,Y*) – коэффициент корреляции *X* и *Y*, ( *X* ), (*Y* ) - среднеквадратичные отклонения *X* и *Y* . Функция регрессии при этом задается формулой



*y*(*x*)

*E*(*Y* )

*r*(*X* ,*Y* ) (*Y* ) (*x E*(*X* )). (3)

(*X* )

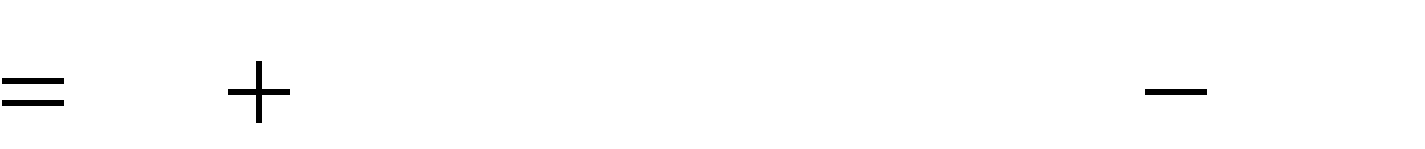
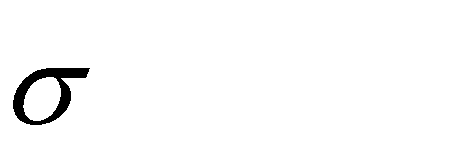
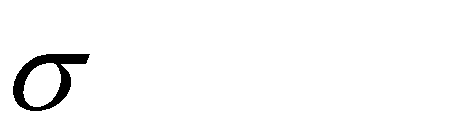
В свою очередь метод наименьших квадратов приводит к следующему вы- ражению для выборочной функции регрессии

*y*(*x*) *Yn*

*rn*(*X* ,*Y* )

*n* (*Y* ) (*x X n* ). (4)

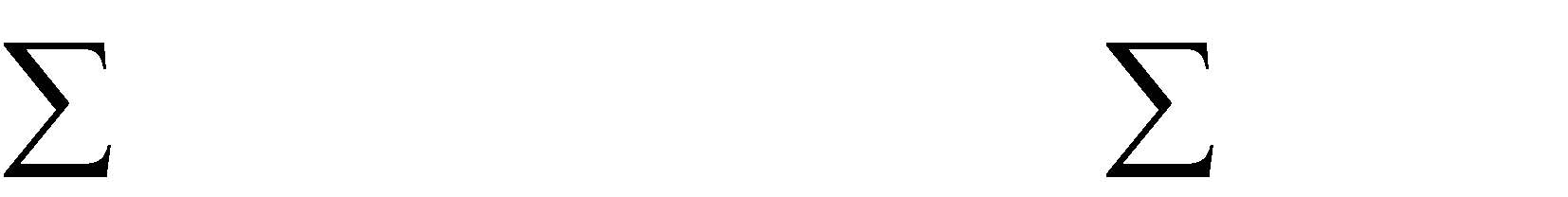
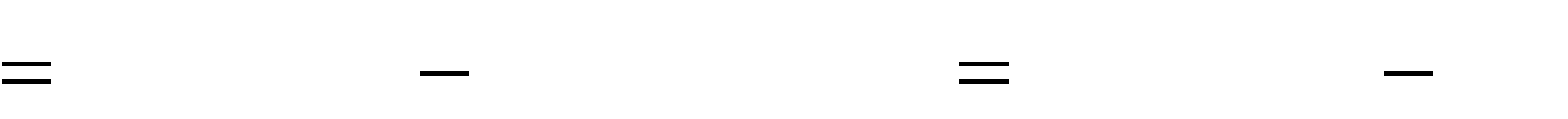
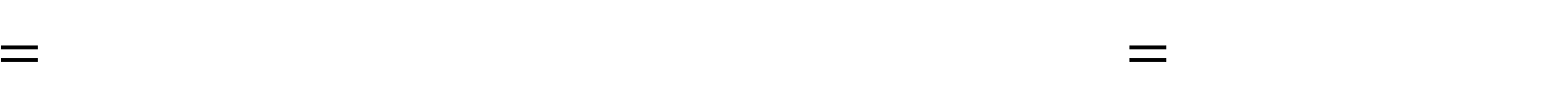
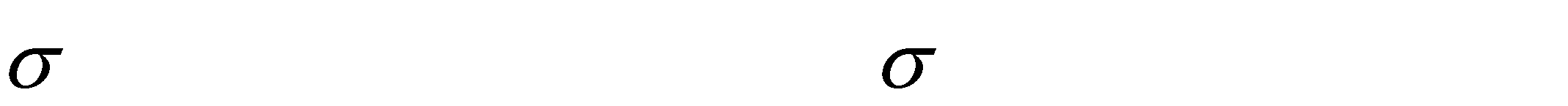
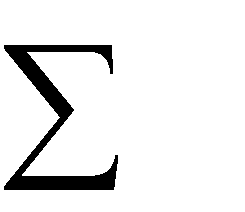
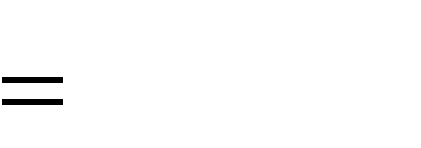
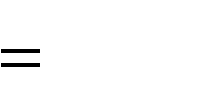
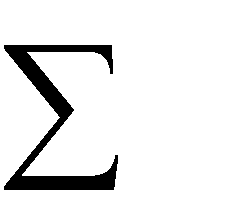
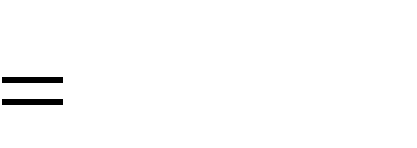
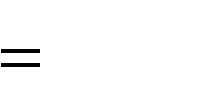
*n*(*X* )



Здесь *X n*

1 *n x*

*n i* 1 *i*



*n*

и *Yn*

1 *n*

*n i* 1

*yi* - оценки математических ожиданий *E*(*X*) и *E*(*Y*)*,*

*n* ( *X* )

1 *n* 2

*n i* 1 *i*

*x*

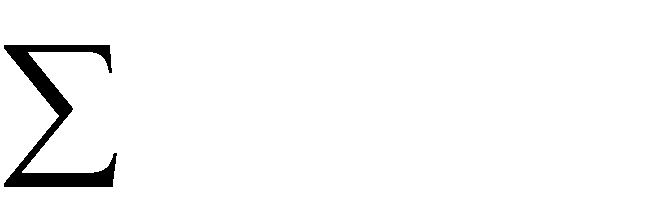
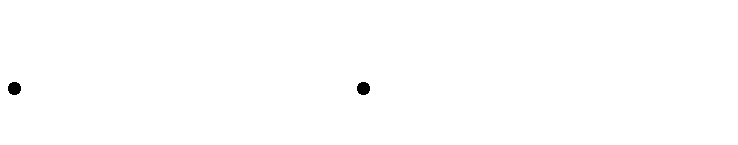
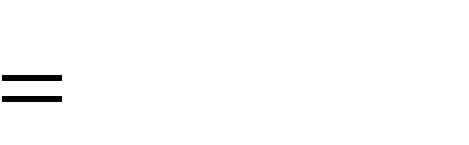
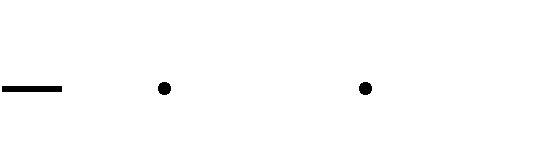
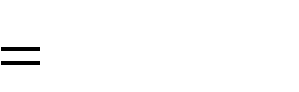
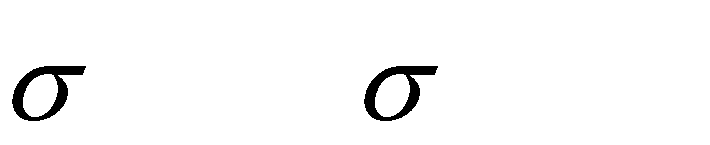
*X* 2 ,

*n* (*Y* )

1 *n*

*n i* 1

*n*



*xi yi*

2 2

*i n*

*y*

*Y*

1. *X n*

- оценки среднеквадратичных от-

*Yn*

клонений *σ*(*X*) и *σ*(*Y*),

*rn* ( *X* ,*Y* )

1. 1

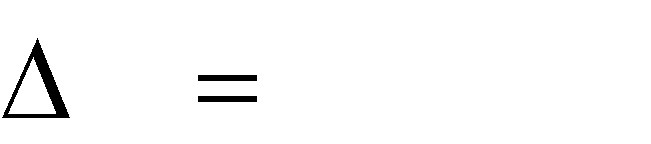
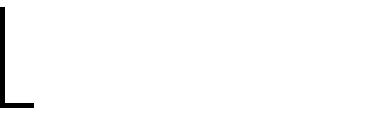
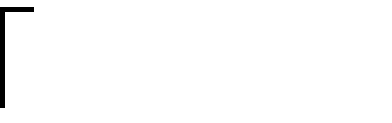
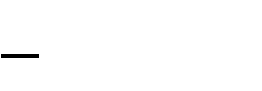
- оценка коэффициента корре-

*n n* ( *X* ) *n* (*Y* )

ляции *r*(*X,Y*); т.е. при построении выборочной регрессии при помощи метода наименьших квадратов все моменты в (3) заменяются своими выборочными оценками (см. пособие с. 96-102).

При обработке выборок большого объѐма часто предварительно проводят группировку значений *Х* и *Y* подобно тому, как это было описано в первой час-

ти типового расчѐта. При этом для частичных интервалов , *i=*1*,…,*

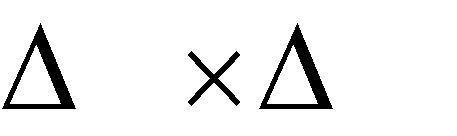


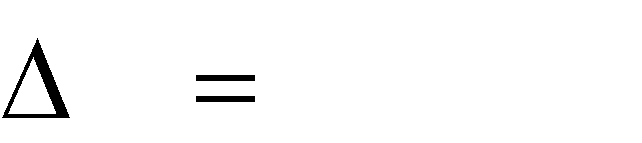
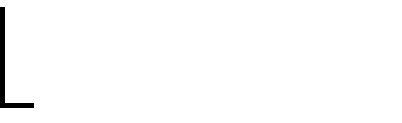
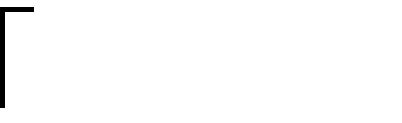
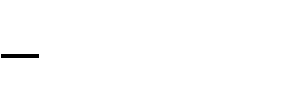
*xi xi* 1, *xi*

*k* и

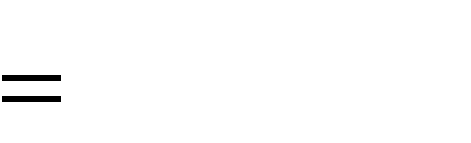
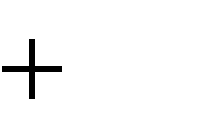
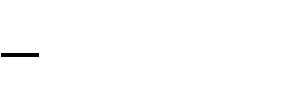
*, j=* 1*,…, m* определяют число элементов выборки

*ni j* , попав-

ших в прямоугольник *xi yj* , и вычисляют середины интервалов по форму-



*y j y j* 1, *y j*



*y j* 1

2

*y j*

лам:

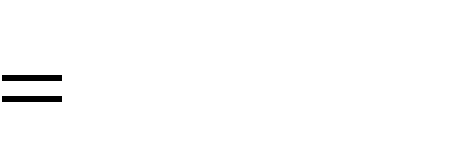
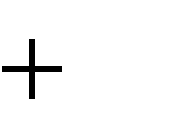
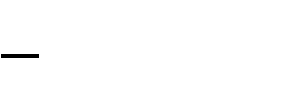
\*

*i*

*x*

\*

*j*



*xi* 1

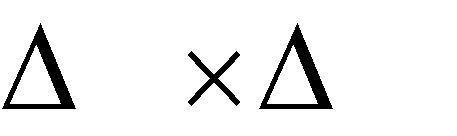
2

*xi*

*y*

,

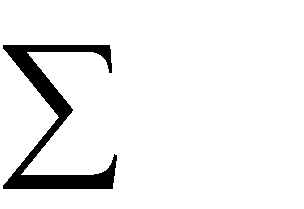
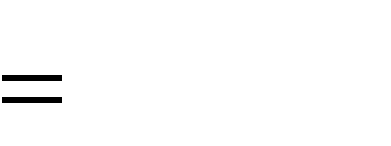
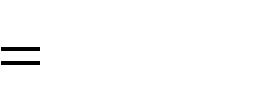
. Все элементы выборки, попавшие в прямо-

угольник *xi yj* , считают равными (*xi\*,yj\**), причѐм количество значений *xi\**

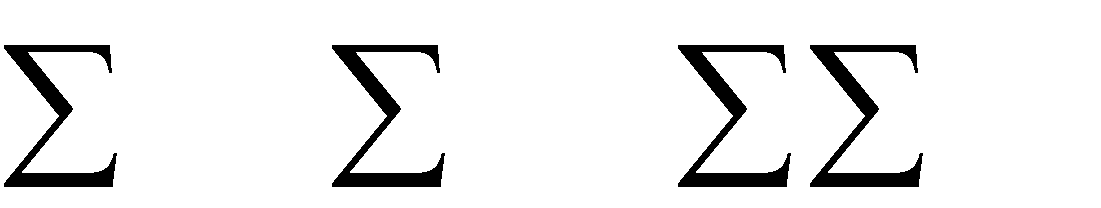
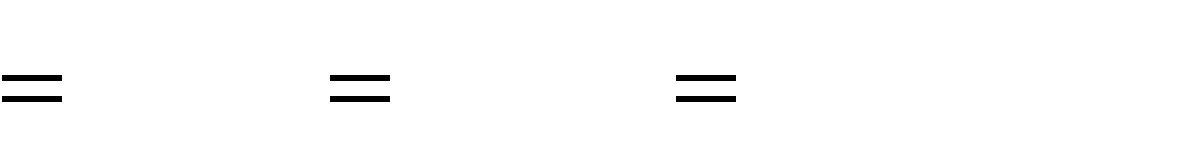
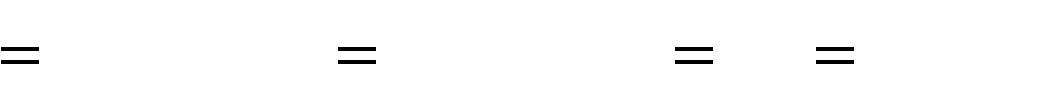
будет равно *ni*

*m*

*ni j* , а количество значений *yj\** будет равно *nj*



1. 1



*k*

*i* 1

*ni*

*m*

*k m*

*j* 1

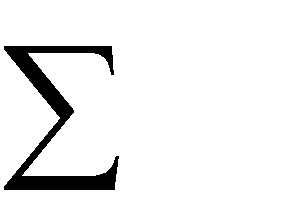
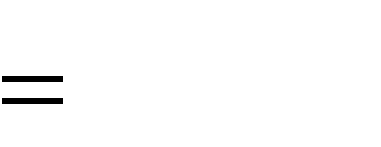
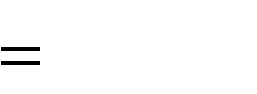
*nj*

*i* 1 *j* 1

*ni j* .

*k*

*ni j* .Объѐм



*i* 1

выборки равен

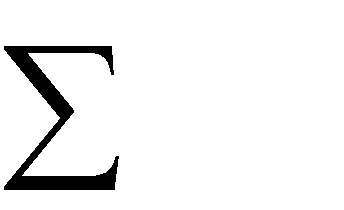
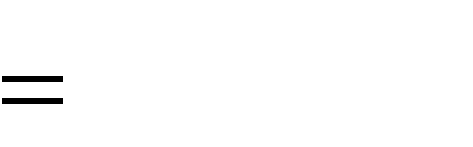
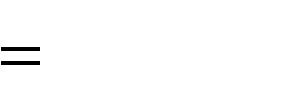
*n*

Все эти данные заносят в таблицу 6.

##### *Таблица* 6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | *y*1*\** | *Y*2*\** | *…* | *ym\** | *ni* |
| *x*1*\** | *n*11 | *N*12 | *…* | *n*1*m* | *n*1 |
| *x*2*\** | *n*21 | *N*22 | *…* | *n*2*m* | *n*2 |
| *…* | *…* | *…* | *…* | *…* | *…* |
| *xk\** | *nk*1 | *Nk*2 | *…* | *nk m* | *nk* |
| *Nj* | *n*1 | *N*2 | *…* | *nm* | *n* |

Для расчѐта коэффициентов в выборочном уравнении линии регрессии (4) ис- пользуют формулы:



*X n*

*1 n*

*k*

*n x* ,

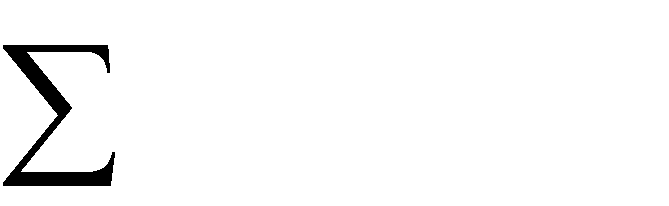
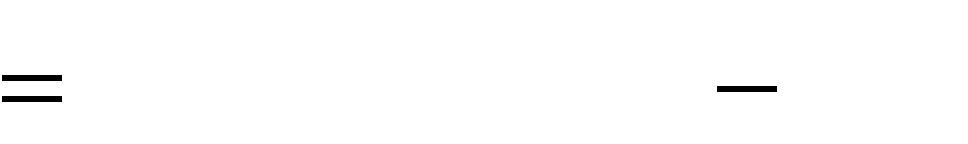
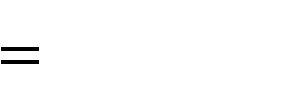
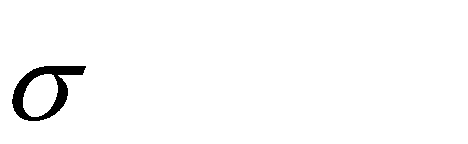
\*

*i* 1

*i i*

*n* ( *X* )

*1 k*



*n i* 1

*ni* (*x*\*)2

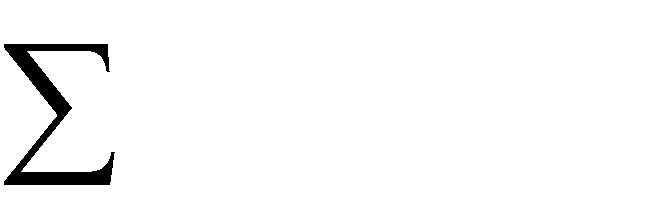
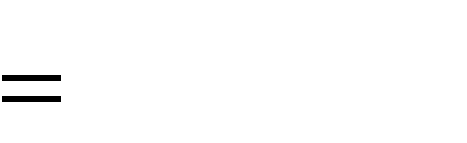
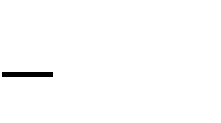
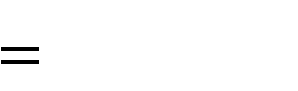
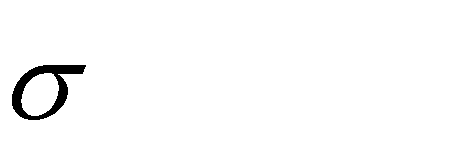
*X* 2 ,

1. *m*

*n*

*Yn*

\* \*



*n*

(*Y* )

1

*n*

*m*

*n* ( *y* )

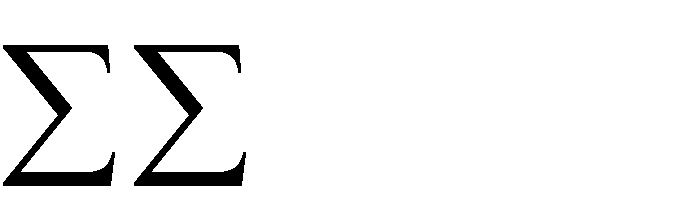
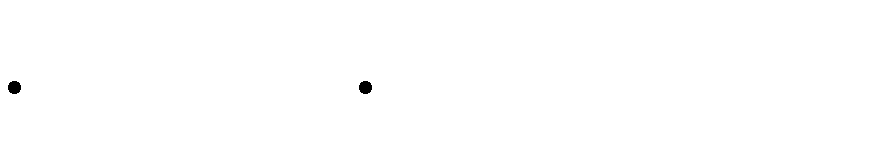
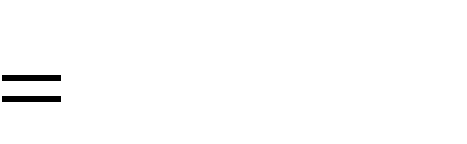
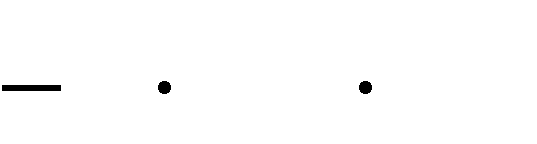
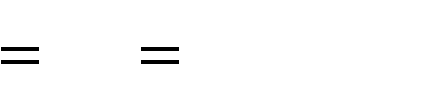
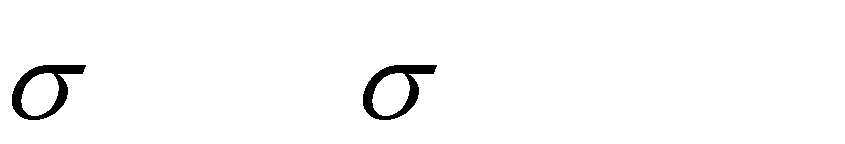
\* 2

*Y* 2

*n*

*j* 1

*j j*



*n x y*

*i j i j*

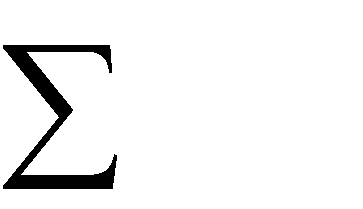
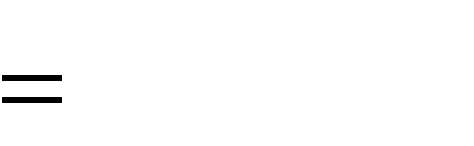
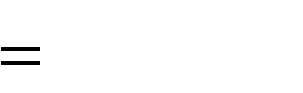
*n X n*

*i*

*Y n*

, (5)

, (6)



*1*

*m*

*n y*

\*

*n j* 1

*j j*

*rn* ( *X* ,*Y* )

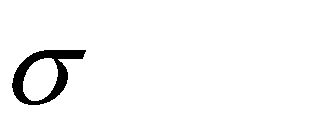
*i* 1 *j* 1 . (7)

*n n* ( *X* ) *n* (*Y* )

В вариантах заданий предлагается таблица группированных данных, на ос- новании которой необходимо найти величины

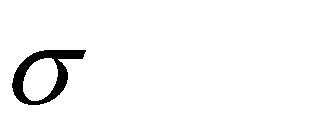
*ni*, *i=*1,…,*k*; *nj , j=*1,…, *m*; *n*;

затем, используя формулы (5), (6), (7) определить точечные оценки математи-



*n* ( *X* )

ческих ожиданий - *X n* и *Y n ,* средних квадратичных отклонений - и

*n* (*Y* ) , коэффициента корреляции - линии регрессии (4).

*rn* ( *X* ,*Y* )

и получить выборочное уравнение

В качестве примера рассмотрим построение выборочного уравнения линии

линейной регрессии по таблице группированных данных 7.

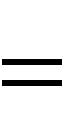
##### *Таблица* 7

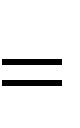
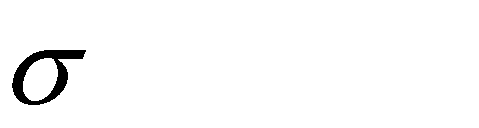
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | *ni* |
| 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 20 | 7 | 20 | 0 | 0 | 0 | 27 |
| 30 | 0 | 23 | 30 | 10 | 0 | 63 |
| 40 | 0 | 0 | 47 | 11 | 9 | 67 |
| 50 | 0 | 0 | 2 | 20 | 7 | 29 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 6 | 3 | 9 |
| *nj* | 12 | 43 | 79 | 47 | 19 | *n*=200 |

По формулам (5) находим

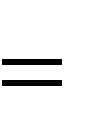
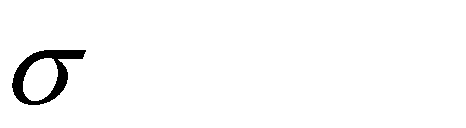
*X* 200 =35,75,

*Y* 200 =35,9;

по формулам (6) находим по формуле (7) находим



200 ( *X* )



200 (*Y* )

11,06,

*r*200 ( *X* ,*Y* )

0,603.

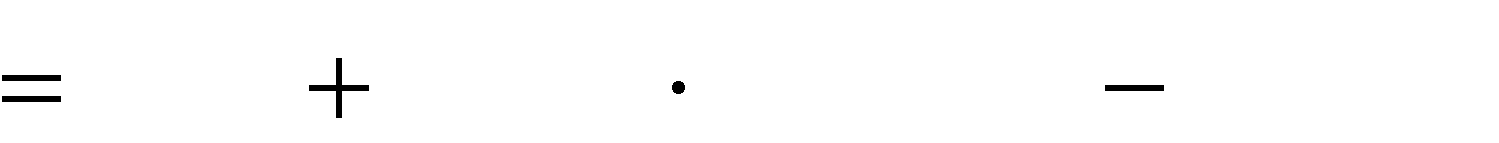
12,09;

Подставив найденные величины в формулу (4), получим искомое выбороч- ное уравнение линейной регрессии *Y* на *X*.

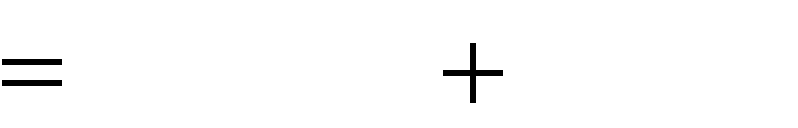
или, окончательно,

*y*(*x*) 35,9 0,603

12,09 (*x*

11,06

35,75) ,

*y*(*x*) 0,659 *x* 12,34 . (8)

Сравним оценки условных математических ожиданий, вычисленные а) на основе последнего уравнения,

б) по данным таблицы 7, полагая, как и ранее, *P*(*yj\**)*= p \*=ni j / ni*.

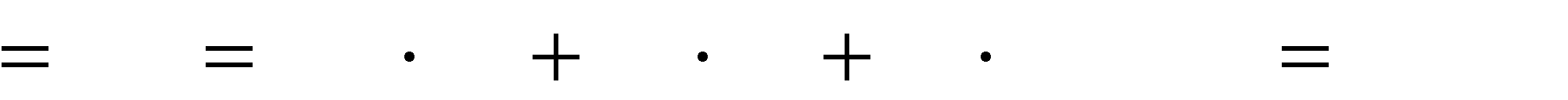
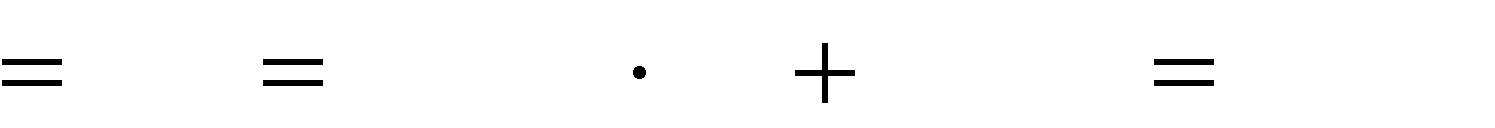
*j*

Например, при *x\* =* 30 имеем:

а) *E*(*Y* | *X*

б) *E*(*Y* | *X*

30) 0,659 30 12,34 32,11;

30) (23 25 30 35 10 45)/ 63 32,94 .

Как видно, соответствие удовлетворительное.

Заметим, что уравнения линейной регрессии (3) и выборочной линейной регрессии (4), (8) являются уравнениями, задающими прямую линию.

# *Варианты индивидуальных заданий*

Вариант 1 Вариант 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 15 | 25 | 30 | 35 |
| 10 | 15 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 10 | 80 | 30 | 0 |
| 30 | 0 | 0 | 45 | 20 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 17 | 27 | 32 | 37 |
| 12 | 30 | 80 | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 45 | 20 | 0 |
| 32 | 0 | 0 | 10 | 15 |

Вариант 3 Вариант 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 19 | 29 | 34 | 39 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 25 |
| 24 | 0 | 35 | 40 | 10 |
| 34 | 30 | 60 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 21 | 31 | 36 | 41 |
| 16 | 0 | 0 | 30 | 80 |
| 26 | 0 | 55 | 20 | 0 |
| 36 | 15 | 0 | 0 | 0 |

Вариант 5 Вариант 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Yj\**  *xi*\* | 23 | 33 | 38 | 43 |
| 18 | 20 | 15 | 0 | 0 |
| 28 | 0 | 45 | 80 | 30 |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 10 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 25 | 35 | 40 | 45 |
| 20 | 0 | 0 | 45 | 30 |
| 30 | 0 | 80 | 10 | 0 |
| 40 | 15 | 20 | 0 | 0 |

Вариант 7 Вариант 8

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 27 | 37 | 42 | 47 |
| 22 | 20 | 10 | 0 | 0 |
| 32 | 0 | 80 | 45 | 0 |
| 42 | 0 | 0 | 15 | 30 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 29 | 39 | 44 | 49 |
| 24 | 45 | 80 | 0 | 0 |
| 34 | 0 | 20 | 10 | 0 |
| 44 | 0 | 0 | 15 | 30 |

Вариант 9 Вариант 10

Вариант 9

Вариант 10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Yj\**  *xi*\* | 31 | 41 | 46 | 51 |
| 26 | 0 | 0 | 45 | 10 |
| 36 | 20 | 30 | 80 | 0 |
| 46 | 15 | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 33 | 43 | 48 | 53 |
| 28 | 15 | 80 | 0 | 0 |
| 38 | 0 | 20 | 45 | 10 |
| 48 | 0 | 0 | 0 | 30 |

Вариант 11 Вариант 12

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 35 | 45 | 50 | 55 |
| 30 | 0 | 0 | 45 | 30 |
| 40 | 80 | 10 | 20 | 0 |
| 50 | 15 | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Yj\**  *x*i\* | 37 | 47 | 52 | 57 |
| 32 | 10 | 10 | 0 | 0 |
| 42 | 0 | 80 | 45 | 0 |
| 52 | 0 | 0 | 15 | 30 |

Вариант 13 Вариант 14

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *y\* xi*\*j | 39 | 49 | 54 | 59 |
| 34 | 0 | 0 | 80 | 30 |
| 44 | 0 | 15 | 20 | 0 |
| 54 | 10 | 45 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\* x*i\* | 41 | 51 | 56 | 61 |
| 36 | 45 | 0 | 0 | 0 |
| 46 | 20 | 10 | 80 | 30 |
| 56 | 0 | 0 | 10 | 15 |

Вариант 15 Вариант 16

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 43 | 53 | 58 | 63 |
| 38 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 48 | 30 | 80 | 15 | 0 |
| 58 | 0 | 0 | 45 | 20 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 45 | 55 | 60 | 65 |
| 40 | 0 | 0 | 15 | 10 |
| 50 | 0 | 30 | 20 | 0 |
| 60 | 45 | 80 | 0 | 0 |

Вариант 17 Вариант 18

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 47 | 57 | 62 | 67 |
| 42 | 30 | 15 | 0 | 0 |
| 52 | 0 | 85 | 25 | 0 |
| 62 | 0 | 0 | 15 | 30 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 49 | 59 | 64 | 69 |
| 44 | 80 | 35 | 0 | 0 |
| 54 | 0 | 25 | 45 | 0 |
| 64 | 0 | 0 | 0 | 15 |

Вариант 19 Вариант 20

Вариант19

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 51 | 61 | 66 | 71 |
| 46 | 0 | 0 | 17 | 23 |
| 56 | 30 | 80 | 35 | 0 |
| 66 | 15 | 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 53 | 63 | 68 | 73 |
| 48 | 0 | 0 | 45 | 32 |
| 58 | 0 | 80 | 10 | 0 |
| 68 | 5 | 28 | 0 | 0 |

Вариант 21 Вариант 22

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *x*i\* | 55 | 65 | 70 | 75 |
| 50 | 24 | 16 | 0 | 0 |
| 60 | 0 | 75 | 45 | 0 |
| 70 | 0 | 0 | 10 | 30 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 57 | 67 | 72 | 77 |
| 52 | 41 | 80 | 0 | 0 |
| 62 | 0 | 20 | 19 | 0 |
| 72 | 0 | 0 | 15 | 25 |

Вариант 23 Вариант 24

Вариант23

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 59 | 69 | 74 | 79 |
| 54 | 14 | 46 | 0 | 0 |
| 64 | 0 | 80 | 20 | 25 |
| 74 | 0 | 0 | 0 | 15 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 61 | 71 | 76 | 81 |
| 56 | 0 | 0 | 82 | 18 |
| 66 | 0 | 45 | 25 | 0 |
| 76 | 30 | 0 | 0 | 0 |

Вариант 25 Вариант 26

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 63 | 73 | 78 | 83 |
| 58 | 33 | 45 | 0 | 0 |
| 68 | 0 | 27 | 10 | 70 |
| 78 | 0 | 0 | 0 | 15 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 65 | 75 | 80 | 85 |
| 60 | 0 | 0 | 16 | 10 |
| 70 | 0 | 45 | 80 | 0 |
| 80 | 24 | 25 | 0 | 0 |

Вариант 27 Вариант 28

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi*\* | 67 | 77 | 82 | 87 |
| 62 | 0 | 0 | 87 | 33 |
| 72 | 0 | 18 | 15 | 0 |
| 82 | 5 | 42 | 0 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 69 | 79 | 84 | 89 |
| 64 | 43 | 0 | 0 | 0 |
| 74 | 10 | 15 | 80 | 30 |
| 84 | 0 | 0 | 5 | 17 |

Вариант 29 Вариант 30

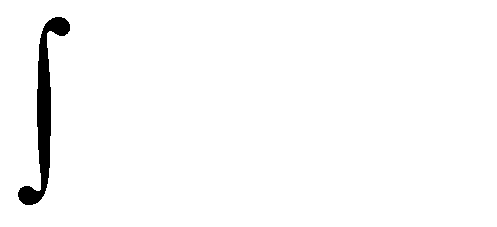
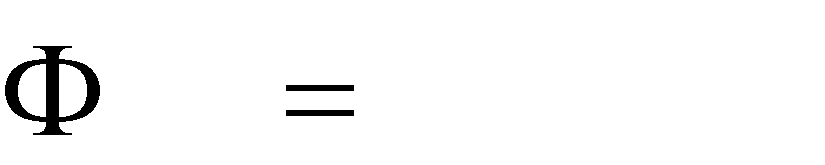
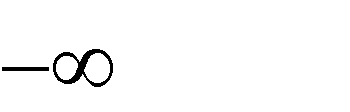
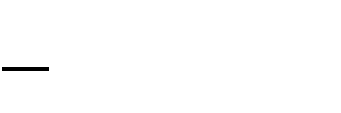
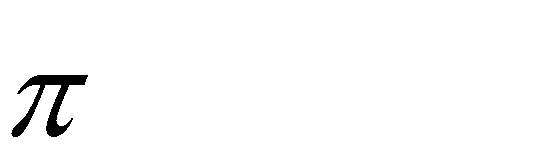
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 71 | 81 | 86 | 91 |
| 66 | 33 | 88 | 0 | 0 |
| 76 | 0 | 25 | 28 | 0 |
| 86 | 0 | 0 | 42 | 5 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *yj\**  *xi\** | 73 | 83 | 88 | 93 |
| 68 | 0 | 0 | 0 | 42 |
| 78 | 30 | 80 | 14 | 10 |
| 88 | 18 | 6 | 0 | 0 |

# *Приложение* 1

##### *Приближённые значения функции стандартного нормального распределе-*

*x*



##### *ния*

(*x*) 1

2

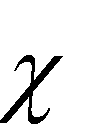
*e t*2 2*dt* ***, умноженные на 105***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 0 | 50000 | 50399 | 50798 | 51197 | 51595 | 51994 | 52392 | 52790 | 53188 | 53586 |
| 0,1 | 53983 | 54380 | 54776 | 55172 | 55567 | 55962 | 56356 | 56749 | 57142 | 57535 |
| 0,2 | 57926 | 58317 | 58706 | 59095 | 59483 | 59871 | 60257 | 60642 | 61026 | 61409 |
| 0,3 | 61791 | 62172 | 62552 | 62930 | 63307 | 63683 | 64058 | 64431 | 64803 | 65173 |
| 0,4 | 65542 | 65910 | 66276 | 66640 | 67003 | 67364 | 67724 | 68082 | 68439 | 68793 |
| 0,5 | 69146 | 69497 | 69847 | 70194 | 70540 | 70884 | 71226 | 71566 | 71904 | 72240 |
| 0,6 | 72575 | 72907 | 73237 | 73565 | 73891 | 74215 | 74537 | 74857 | 75175 | 75490 |
| 0,7 | 75804 | 76115 | 76424 | 76730 | 77035 | 77337 | 77637 | 77935 | 78230 | 78524 |
| 0,8 | 78814 | 79103 | 79389 | 79673 | 79955 | 80234 | 80511 | 80785 | 81057 | 81327 |
| 0,9 | 81594 | 81859 | 82121 | 82381 | 82639 | 82894 | 83147 | 83398 | 83646 | 83891 |
| 1 | 84134 | 84375 | 84614 | 84849 | 85083 | 85314 | 85543 | 85769 | 85993 | 86214 |
| 1,1 | 86433 | 86650 | 86864 | 87076 | 87286 | 87493 | 87698 | 87900 | 88100 | 88298 |
| 1,2 | 88493 | 88686 | 88877 | 89065 | 89251 | 89435 | 89617 | 89796 | 89973 | 90147 |
| 1,3 | 90320 | 90490 | 90658 | 90824 | 90988 | 91149 | 91308 | 91466 | 91621 | 91774 |
| 1,4 | 91924 | 92073 | 92220 | 92364 | 92507 | 92647 | 92785 | 92922 | 93056 | 93189 |
| 1,5 | 93319 | 93448 | 93574 | 93699 | 93822 | 93943 | 94062 | 94179 | 94295 | 94408 |
| 1,6 | 94520 | 94630 | 94738 | 94845 | 94950 | 95053 | 95154 | 95254 | 95352 | 95449 |
| 1,7 | 95543 | 95637 | 95728 | 95818 | 95907 | 95994 | 96080 | 96164 | 96246 | 96327 |
| 1,8 | 96407 | 96485 | 96562 | 96638 | 96712 | 96784 | 96856 | 96926 | 96995 | 97062 |
| 1,9 | 97128 | 97193 | 97257 | 97320 | 97381 | 97441 | 97500 | 97558 | 97615 | 97670 |
| 2 | 97725 | 97778 | 97831 | 97882 | 97932 | 97982 | 98030 | 98077 | 98124 | 98169 |
| 2,1 | 98214 | 98257 | 98300 | 98341 | 98382 | 98422 | 98461 | 98500 | 98537 | 98574 |
| 2,2 | 98610 | 98645 | 98679 | 98713 | 98745 | 98778 | 98809 | 98840 | 98870 | 98899 |
| 2,3 | 98928 | 98956 | 98983 | 99010 | 99036 | 99061 | 99086 | 99111 | 99134 | 99158 |
| 2,4 | 99180 | 99202 | 99224 | 99245 | 99266 | 99286 | 99305 | 99324 | 99343 | 99361 |
| 2,5 | 99379 | 99396 | 99413 | 99430 | 99446 | 99461 | 99477 | 99492 | 99506 | 99520 |
| 2,6 | 99534 | 99547 | 99560 | 99573 | 99585 | 99598 | 99609 | 99621 | 99632 | 99643 |
| 2,7 | 99653 | 99664 | 99674 | 99683 | 99693 | 99702 | 99711 | 99720 | 99728 | 99736 |
| 2,8 | 99744 | 99752 | 99760 | 99767 | 99774 | 99781 | 99788 | 99795 | 99801 | 99807 |
| 2,9 | 99813 | 99819 | 99825 | 99831 | 99836 | 99841 | 99846 | 99851 | 99856 | 99861 |
| 3 | 99865 | 99869 | 99874 | 99878 | 99882 | 99886 | 99889 | 99893 | 99896 | 99900 |
| 3,1 | 99903 | 99906 | 99910 | 99913 | 99916 | 99918 | 99921 | 99924 | 99926 | 99929 |
| 3,2 | 99931 | 99934 | 99936 | 99938 | 99940 | 99942 | 99944 | 99946 | 99948 | 99950 |
| 3,3 | 99952 | 99953 | 99955 | 99957 | 99958 | 99960 | 99961 | 99962 | 99964 | 99965 |
| 3,4 | 99966 | 99968 | 99969 | 99970 | 99971 | 99972 | 99973 | 99974 | 99975 | 99976 |
| 3,5 | 99977 | 99978 | 99978 | 99979 | 99980 | 99981 | 99981 | 99982 | 99983 | 99983 |
| 3,6 | 99984 | 99985 | 99985 | 99986 | 99986 | 99987 | 99987 | 99988 | 99988 | 99989 |
| 3,7 | 99989 | 99990 | 99990 | 99990 | 99991 | 99991 | 99992 | 99992 | 99992 | 99992 |
| 3,8 | 99993 | 99993 | 99993 | 99994 | 99994 | 99994 | 99994 | 99995 | 99995 | 99995 |
| 3,9 | 99995 | 99995 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99996 | 99997 | 99997 |

# *Приложение* 2

# *Таблица*

# *распределения*



*2*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *r*⋱*P* | *0.20* | *0.10* | *0.05* | *0.02* | *0.01* | *0.005* | *0.002* | *0.001* |
| *1* | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,41 | 6,635 | 7,879 | 9,5 | 10,83 |
| *2* | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,82 | 9,210 | 10,60 | 12,4 | 13,82 |
| *3* | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,84 | 11,35 | 12,84 | 14,8 | 16,27 |
| *4* | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,67 | 13,28 | 14,86 | 16,9 | 18,47 |
| *5* | 7,289 | 9,236 | 11,07 | 13,39 | 15,09 | 16,75 | 18,9 | 20,52 |
| *6* | 8,558 | 10,65 | 12,59 | 15,03 | 16,81 | 18,55 | 20,7 | 22,46 |
| *7* | 9,803 | 12,02 | 14,07 | 16,62 | 18,48 | 20,29 | 22,6 | 24,32 |
| *8* | 11,03 | 13,36 | 15,51 | 18,17 | 20,09 | 21,96 | 24,3 | 26,13 |
| *9* | 12,24 | 14,68 | 16,92 | 19,68 | 21,67 | 23,59 | 26,1 | 27,88 |
| *10* | 13,44 | 15,99 | 18,31 | 21,2 | 23,21 | 25,19 | 27,7 | 29,59 |
| *11* | 14,63 | 17,28 | 19,68 | 22,6 | 24,73 | 26,76 | 29,4 | 31,26 |
| *12* | 15,81 | 18,55 | 21,03 | 24,1 | 26,22 | 28,30 | 30,9 | 32,91 |
| *13* | 16,99 | 19,81 | 22,36 | 25,5 | 27,69 | 29,82 | 32,5 | 34,53 |
| *14* | 18,15 | 21,06 | 23,69 | 26,9 | 29,14 | 31,32 | 34,0 | 36,12 |
| *15* | 19,31 | 22,31 | 25,00 | 28,3 | 30,58 | 32,80 | 35,6 | 37,70 |
| *16* | 20,47 | 23,54 | 26,30 | 29,6 | 32,00 | 34,27 | 37,1 | 39,25 |
| *17* | 21,62 | 24,77 | 27,59 | 31,0 | 33,41 | 35,72 | 38,6 | 40,79 |
| *18* | 22,76 | 25,99 | 28,87 | 32,3 | 34,81 | 37,16 | 40,1 | 42,31 |
| *19* | 23,90 | 27,20 | 30,14 | 33,7 | 36,19 | 38,58 | 41,6 | 43,82 |
| *20* | 25,04 | 28,41 | 31,41 | 35,0 | 37,57 | 40,00 | 43,0 | 45,32 |
| *21* | 26,17 | 29,62 | 32,67 | 36,3 | 38,93 | 41,40 | 44,5 | 46,80 |
| *22* | 27,30 | 30,81 | 33,92 | 37,7 | 40,29 | 42,80 | 45,9 | 48,27 |
| *23* | 28,43 | 32,01 | 35,17 | 39,0 | 41,64 | 44,18 | 47,3 | 49,73 |
| *24* | 29,55 | 33,20 | 36,42 | 40,3 | 42,98 | 45,56 | 48,7 | 51,18 |
| *25* | 30,68 | 34,38 | 37,65 | 41,6 | 44,31 | 46,93 | 50,1 | 52,62 |
| *26* | 31,80 | 35,56 | 38,89 | 42,9 | 45,64 | 48,29 | 51,6 | 54,05 |
| *27* | 32,91 | 36,74 | 40,11 | 44,1 | 46,96 | 49,65 | 52,9 | 55,48 |
| *28* | 34,03 | 37,92 | 41,34 | 45,4 | 48,28 | 50,99 | 54,4 | 56,89 |

***Варианты*** типовых расчетов для каждого студента представляют собой вы- борки из генеральной совокупности объема *n* =200. Эти выборки формируются на основании приложения 3.

# *Приложение* 3

##### *Данные для формирования индивидуальных заданий по теме “Оценивание,* проверка статистических гипотез”

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1.006 | 0.386 | -1.223 | -0.591 | -0.345 | 0.157 | 0.800 | -0.155 | -0.379 | -1.023 |
| 1.306 | -0.861 | 0.303 | 0.518 | 0.986 | 0.788 | 0.883 | -0.098 | -0.242 | 1.701 |
| 1.199 | -1.230 | -0.730 | -1.492 | 0.643 | -0.577 | -0.224 | 0.997 | -1.165 | -0.494 |
| -2.577 | 2.641 | -1.143 | -0.086 | 2.919 | 0.527 | 0.297 | 0.434 | 0.756 | 0.172 |
| -2.086 | -0.904 | -1.413 | -0.012 | -1.248 | 1.671 | -0.521 | -0.025 | 1.164 | 0.354 |
| 0.866 | -0.005 | 0.403 | 1.908 | 0.448 | 0.169 | -0.731 | -1.189 | 0.905 | 0.283 |
| 2.431 | 1.409 | 0.191 | -0.165 | 0.889 | 0.804 | -2.131 | -0.754 | 1.458 | 1.650 |
| 0.026 | 0.885 | 0.011 | -0.990 | -0.104 | 0.174 | -0.052 | -0.182 | 1.813 | 0.346 |
| 0.110 | 1.757 | -0.693 | -0.732 | 1.073 | -1.724 | -1.810 | 0.947 | -1.118 | 0.666 |
| 0.970 | 1.140 | -1.105 | 0.894 | 1.547 | -0.484 | -0.086 | -0.066 | 0.150 | -0.264 |
| 0.866 | -0.005 | 0.403 | 1.908 | 0.448 | 0.169 | -0.731 | -1.189 | 0.905 | 0.283 |
| 2.431 | 1.409 | 0.191 | -0.165 | 0.889 | 0.804 | -2.131 | -0.754 | 1.458 | 1.650 |
| 0.110 | 1.757 | -0.693 | -0.732 | 1.073 | -1.724 | -1.810 | 0.947 | -1.118 | 0.666 |
| 0.026 | 0.885 | 0.011 | -0.990 | -0.104 | 0.174 | -0.052 | -0.182 | 1.813 | 0.346 |
| 0.970 | 1.140 | -1.105 | 0.894 | 1.547 | -0.484 | -0.086 | -0.066 | 0.150 | -0.264 |
| -0.644 | -0.149 | 0.365 | 1.601 | 1.307 | 0.041 | -2.312 | 1.023 | 1.880 | -1.422 |
| -0.905 | 0.577 | -0.548 | 0.732 | -0.482 | 0.413 | 1.380 | -0.489 | -0.799 | -0.755 |
| -0.716 | 0.753 | 0.578 | 0.555 | -1.752 | 0.597 | 1.390 | -0.402 | -0.560 | 0.157 |
| 0.007 | -0.167 | -1.955 | -0.813 | -0.926 | 1.924 | -0.453 | 1.399 | 1.708 | 0.378 |
| -2.814 | -0.581 | 0.522 | -0.539 | 0.922 | 0.714 | -0.628 | 0.280 | -0.644 | 0.178 |
| -0.602 | 2.301 | -0.432 | 0.273 | -0.802 | -0.322 | 0.459 | -0.023 | 0.361 | 0.557 |
| -0.993 | -0.270 | -0.194 | 2.646 | -0.456 | -0.703 | 0.660 | 0.134 | -2.058 | -0.180 |
| 1.188 | 0.502 | 0.985 | -0.053 | 0.193 | -0.744 | 1.124 | 2.408 | -2.332 | -0.035 |
| 2.388 | -0.119 | 0.468 | 0.472 | 0.889 | 0.371 | 0.979 | 0.901 | -0.370 | 1.934 |
| 2.265 | -0.001 | -1.364 | -2.080 | -1.591 | 1.437 | -1.316 | 0.076 | 1.285 | 1.305 |
| -0.355 | -2.735 | 1.194 | -1.038 | 0.586 | -0.213 | 1.143 | 0.454 | 0.097 | -0.016 |
| -0.327 | -0.535 | 0.743 | 0.628 | 1.525 | 0.492 | 0.979 | -1.417 | -0.226 | 0.449 |
| 0.083 | 2.209 | -0.121 | 0.867 | 2.143 | -0.323 | 0.492 | -0.919 | -0.317 | -0.522 |
| 0.433 | -0.605 | -0.031 | 2.071 | -0.746 | 0.822 | 1.257 | -1.448 | 0.634 | -1.055 |
| -1.435 | -1.003 | -0.594 | -1.531 | -1.414 | 0.594 | -1.481 | 0.039 | -0.047 | 1.152 |
| -0.499 | 1.683 | 2.247 | 1.444 | -0.418 | -2.977 | -0.968 | -0.308 | -1.816 | -0.446 |
| 1.627 | 1.555 | 0.310 | -0.074 | 1.414 | 1.007 | 0.555 | 0.003 | -2.789 | 0.005 |
| -0.239 | -1.050 | 1.991 | -0.362 | -0.847 | 0.884 | 0.759 | -1.406 | 0.262 | -0.206 |
| -0.961 | 0.096 | -0.119 | -0.777 | 0.166 | -0.405 | -0.572 | 1.624 | 0.119 | 0.049 |
| -0.152 | 0.251 | -0.272 | -0.250 | -0.048 | -2.619 | 1.158 | 0.139 | 0.332 | 0.926 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.350 | 0.033 | 0.478 | 0.637 | -0.033 | -0.319 | 0.570 | -0.837 | -0.413 | -1.640 |
| -0.795 | -0.015 | 1.774 | -1.568 | 0.302 | -1.120 | -0.917 | -0.091 | 1.118 | 0.277 |
| -0.622 | -0.554 | -0.470 | 0.700 | -0.656 | 1.460 | 1.701 | 0.630 | -0.700 | -0.674 |
| 1.429 | -1.163 | -0.925 | 0.973 | -0.052 | 0.409 | -0.024 | 0.384 | -0.350 | 0.203 |
| -2.084 | 0.100 | 0.001 | -0.070 | 0.773 | 1.132 | -0.769 | -0.609 | 1.816 | 1.307 |
| 0.462 | -0.603 | 0.264 | -0.373 | 2.173 | -1.875 | 0.261 | 0.064 | -0.814 | -0.456 |
| 1.288 | 1.833 | 0.292 | -0.294 | 0.572 | 0.917 | 0.743 | -1.727 | 0.990 | -1.903 |
| -0.956 | -0.965 | 0.781 | -1.717 | 0.815 | -0.546 | -0.162 | 0.716 | -1.781 | -0.392 |
| 1.195 | -0.397 | 0.404 | -0.053 | -1.078 | -0.605 | 0.435 | 0.036 | -0.044 | -1.107 |
| -0.405 | 0.089 | -0.325 | 0.217 | -0.579 | 0.025 | 0.861 | -0.184 | 0.890 | 1.757 |
| -0.719 | 1.202 | -1.083 | 0.606 | 1.244 | -1.547 | -0.108 | 0.856 | 1.034 | -0.127 |
| -0.219 | -0.112 | 0.157 | 0.074 | 0.029 | -1.071 | -0.300 | 3.343 | -0.618 | 1.019 |
| -0.030 | 0.673 | -0.662 | -0.685 | -1.675 | 0.737 | 1.279 | 0.894 | 0.987 | 0.170 |
| -0.495 | -1.322 | 0.362 | 0.475 | -0.043 | -1.698 | -0.404 | -0.741 | -0.237 | -0,420 |
| -0.333 | -0.216 | 1.170 | 0.757 | -0.691 | -0.591 | 1.444 | 1.695 | 0.307 | 2.096 |
| -0.857 | 1.419 | -1.178 | -0.848 | -1.576 | 2.249 | -1.159 | -0.676 | -0.486 | 0.388 |
| -0.771 | 0.626 | -0.567 | 1.859 | -0.610 | -0.016 | 0.686 | 3.412 | -0.331 | -0.652 |
| 1.464 | 2.221 | 1.177 | -0.036 | 0.376 | 0.735 | 0.730 | -0.394 | 0.776 | -0.056 |
| 1.091 | -1.292 | 0.225 | 2.591 | 1.272 | -0.640 | 0.514 | 1.205 | -0.332 | 0.422 |
| -0.074 | -0.030 | 1.592 | -0.039 | 1.199 | 0.212 | -2.032 | 0.180 | -1.065 | -0.053 |
| 0.786 | 0.316 | -0.973 | -2.121 | -0.033 | 0.188 | 1.220 | 0.897 | -2.009 | -0.014 |
| -0.137 | 1.984 | -1.147 | -1.836 | -0.541 | 0.284 | -0.364 | -1.230 | 0.243 | -0.516 |
| 0.636 | -0.645 | -1.484 | -1.542 | -0.067 | -1.529 | -0.632 | 0.125 | 0.149 | 1.207 |
| 1.578 | 0.313 | -0.966 | -0.235 | 2.256 | -2.370 | -0.222 | 0.807 | 2.607 | 0.110 |
| 0.236 | -1.251 | 2.032 | -0.211 | 1.123 | -0.563 | 1.336 | 0.874 | 1.987 | -1.258 |
| 1.693 | -0.453 | -0.362 | 0.971 | 0.539 | 0.238 | -0.214 | -1.162 | -0.102 | 0.140 |
| 0.457 | -0.620 | -0.984 | -1.143 | -0.691 | -1.203 | 1.082 | -0.647 | -0.667 | 1.581 |
| 1.067 | -1.925 | 1.365 | 2.047 | 1.084 | -0.308 | -0.171 | 1.572 | -0.705 | -0.297 |
| -0.127 | -1.425 | 0.867 | 0.007 | 0.629 | -1.537 | -0.810 | 0.130 | -0.220 | -0.351 |
| 0.188 | 0.268 | -0.428 | 0.746 | -0.756 | -0.620 | -0.005 | -0.804 | -0.450 | 0.872 |
| 0.821 | -0.271 | -0.571 | -1.022 | 0.559 | -1.372 | 0.515 | 0.086 | -0.332 | 0.327 |
| 0.597 | 0.164 | -1.416 | -0.112 | -0.619 | 0.675 | -0.652 | 2.545 | 1.844 | -0.006 |
| 0.039 | -0.473 | -1.056 | 0.062 | -1.246 | 0.056 | 0.014 | -0.086 | 0.287 | 0.064 |
| -1.126 | 0.452 | 1.767 | -0.439 | 0.095 | 1.323 | 1.213 | 1.287 | -0.269 | -0.168 |
| 0.682 | -0.271 | 2.108 | 1.835 | 0.066 | -0.232 | 1.411 | 0.248 | -0.182 | -0.962 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -0.028 | 0.919 | 0.915 | 0.069 | -1.132 | -0.923 | -1.911 | 1.558 | 0.262 | -0.957 |
| -1.542 | -1.171 | -0.568 | -0.122 | -1.468 | 0.588 | -0.994 | -0.122 | 0.573 | 1.923 |
| -0.158 | -1.213 | 0.590 | 0.454 | -0.792 | -0.698 | 0.612 | 0.122 | -0.207 | 1.016 |
| 0.091 | 2.016 | 0.193 | 0.092 | -1.857 | 0.586 | 1.149 | -0.291 | -2.691 | -2.676 |
| 0.337 | 2.704 | -2.068 | -3.503 | -0.266 | -1.389 | -0.612 | -0.556 | 2.156 | -0.005 |
| 0.251 | 0.409 | 0.632 | 0.977 | -1.004 | 0.928 | -1.032 | -1.060 | 1.297 | 1.204 |
| 0.792 | 1.675 | -0.038 | 1.306 | -0.125 | -0.127 | 1.804 | 1.301 | 1.134 | 1.093 |
| 0.592 | 0.515 | -0.793 | 0.901 | -1.353 | 0.304 | 0.367 | 0.980 | 1.462 | 1.093 |
| 0.578 | -0.177 | -1.041 | -0.731 | 1.331 | -1.079 | -0.319 | 0.453 | -1.001 | 0.135 |
| 0.291 | 0.010 | 0.298 | 0.820 | 0.451 | -1.305 | -0.504 | 0.446 | -0.638 | 0.256 |
| -0.327 | 0.407 | -0.026 | 0.019 | 0.717 | 0.486 | 0.924 | 0.528 | -0.010 | -0.693 |
| -0.038 | -1.662 | 0.640 | 0.566 | 0.293 | 1.168 | 1.235 | -0.717 | -0.100 | 0.026 |
| 1.374 | 2.043 | -0.489 | 1.113 | -1.747 | 0.938 | 0.592 | 0.295 | 1.119 | 0.208 |
| 0.308 | -0.535 | 1.615 | -1.028 | 0.958 | -0.660 | 1.538 | 0.756 | 1.306 | 0.632 |
| 0.244 | 2.134 | 0.112 | -1.352 | -0.601 | -0.035 | 0.933 | 1.057 | 0.058 | -3.285 |
| 1.486 | -1.330 | -1.231 | -0.388 | -0.778 | -2.394 | -0.654 | 0.134 | 1.763 | -1.052 |
| -1.772 | 0.403 | 0.694 | 0.308 | -0.761 | -0.391 | -0.803 | -0.976 | 1.697 | -0.646 |
| -0.873 | 1.439 | -1.192 | 0.681 | 0.564 | 0.440 | 1.328 | 0.533 | -0.151 | -2.209 |
| -1.574 | -0.892 | -0.097 | -1.347 | -0.603 | 0.885 | -2.623 | -0.809 | -0.872 | 0.409 |
| -0.795 | -0.679 | -0.871 | -1.085 | -0.873 | 0.711 | 1.203 | 1.181 | -0.861 | 0.598 |
| -0.203 | 0.578 | -1.211 | -1.845 | 1.357 | -0.404 | 1.266 | 0.462 | -0.859 | 1.227 |
| -0.852 | 0.615 | -2.627 | 1.011 | -0.504 | -0.383 | 1.177 | 0.942 | -2.268 | 0.069 |
| 0.022 | -1.295 | -1.375 | 1.630 | -0.703 | 0.128 | 0.214 | 0.418 | 1.656 | -1.571 |
| -0.604 | 0.952 | 0.026 | -0.161 | 0.621 | 1.093 | -0.467 | 0.564 | -0.994 | -1.802 |
| -0.318 | -0.619 | -0.708 | 0.368 | -0.100 | 0.472 | -0.699 | -0.764 | 0.344 | 1.286 |
| -0.941 | 0.512 | -0.155 | 0.887 | -1.350 | -0.784 | 0.692 | 0.267 | -1.310 | 0.563 |
| 0.292 | 0.051 | -0.432 | -0.253 | -0.802 | 0.093 | 0.153 | -1.221 | 0.234 | 0.480 |
| 0.934 | 0.169 | 0.096 | 1.269 | -0.965 | -0.048 | 0.636 | -0.287 | 0.088 | 1.454 |
| 1.316 | -0.445 | 0.559 | -1.028 | 0.465 | -0.394 | 1.334 | 0.105 | 0.908 | -0.040 |
| 0.333 | -0.532 | 0 020 | 0.117 | -0.325 | -1.218 | -1.240 | -1.401 | -1.864 | 0.179 |
| 0.012 | 0.072 | 1.471 | 0.613 | -2.320 | -0.380 | -0.330 | 0.369 | 0.605 | -0.639 |
| -0.932 | 0.630 | -0.788 | 0.047 | -1.830 | -0.696 | -1.109 | -2.266 | 0.376 | -0.970 |
| 0.464 | 0.710 | 1.339 | 0.438 | -1.003 | -1.649 | 0.136 | 0.651 | 0.578 | -0.111 |
| -1.474 | 0.213 | 0.549 | 2.095 | -1.366 | -0.364 | -0.293 | 0.320 | -1.387 | 0.671 |
| -0.866 | 1.931 | 1.925 | 0.035 | -0.758 | 0.846 | 0.166 | -0.579 | -0.631 | 1.161 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.873 | 0.029 | 0.743 | 1.279 | 0.764 | 2.131 | -1.086 | 0.689 | 0.386 | -1.496 |
| 0.078 | 0.093 | 0.012 | -1.140 | -0.749 | -0.197 | -1.901 | -0.774 | 1.642 | -0.026 |
| -1.142 | -0.848 | 0.505 | -1.200 | 0.358 | 0.654 | -0.379 | 0.214 | -1.461 | 0.788 |
| -0.204 | -1.715 | -0.059 | -1.107 | -1.298 | 0.365 | -0.797 | 0.416 | -0.614 | 2.202 |
| 0.396 | -0.191 | 0.599 | 1.049 | -0.158 | -0.233 | -1.190 | -0.299 | -0.541 | 1.387 |
| 1.140 | 0.706 | -0.643 | 0.920 | 0.562 | 1.007 | -0.038 | -0.160 | -0.687 | 0.323 |
| -1.068 | -1.533 | -0.101 | 0.111 | 0.286 | -0.082 | 1.903 | 2.815 | -0.514 | 0.820 |
| 0.769 | 0.873 | 2.093 | -0.620 | 0.508 | 0.371 | 0.877 | -0.779 | -1.002 | -1.872 |
| 1.192 | -1.799 | 0.830 | -0.384 | 0.665 | 1.162 | -0.455 | 1.664 | 0.359 | -1.638 |
| -0.168 | -1.582 | -0.153 | -0.165 | -2.129 | 0.515 | 0.470 | -0.664 | -0.432 | 1.294 |
| -0.540 | 0.057 | -0.711 | -0.623 | 0.183 | 0.446 | 0.592 | -0.982 | 0.184 | 1.586 |
| -0.946 | 0.441 | -1.151 | -0.307 | -0.970 | -0.044 | 0.737 | -0.738 | 0.139 | 1.660 |
| -0.394 | -0.030 | 0.106 | -0.922 | -1.315 | 2.134 | 0.043 | 0.042 | -0.062 | -0.850 |
| 0.170 | -0.053 | -0.330 | -0.371 | 0.918 | -2.029 | -0.097 | 0.372 | -0.176 | 0.381 |
| -1.211 | -1.455 | -0.479 | -1.465 | -0.987 | 0.549 | 1.131 | -1.853 | -0.508 | 0.201 |
| 0.830 | -0.213 | 1.958 | 0.966 | 0.627 | -0.369 | -0.086 | -0.413 | -0.271 | 1.482 |
| -0.094 | -1.821 | -0.860 | -1.903 | -0.355 | 1.438 | 0.372 | 0.664 | -0.583 | -1.240 |
| -0.459 | 1.468 | -0.335 | 1.108 | 1.347 | 0.067 | -0.154 | -0.415 | -1.412 | -0.484 |
| 0.049 | -0.464 | -0.589 | 0.716 | 0.118 | -0.228 | 0.515 | -0.346 | -1.066 | 0.785 |
| -1.363 | 0.733 | -0.312 | 0.186 | -0.583 | 0.486 | 1.358 | -0.061 | 0.555 | -0.095 |
| 1.196 | 1.188 | 0.534 | -0.651 | -1.503 | -1.026 | 0.397 | -0.149 | 0.781 | 1.560 |
| -0.754 | 0.302 | -1.810 | -1.246 | 1.184 | 0.109 | 0.493 | 1.144 | -0.661 | 1.402 |
| -0.410 | -0.475 | 1.096 | -1.281 | -0.579 | 1.583 | -0.430 | 0.941 | 0.418 | -0.363 |
| -1.771 | 0.306 | 0.136 | -1.935 | 1.258 | -0.396 | 0.603 | 1.488 | 0.582 | -1.124 |
| -1.007 | -0.630 | 0.584 | 0.136 | -0.055 | -0.312 | -0.716 | 0.620 | -0.156 | -1.570 |
| 0.140 | 0.326 | 0.709 | -0.002 | -1.623 | 1.359 | 0.406 | -0.685 | 0.939 | -0.326 |
| -0.868 | -0.618 | 0.171 | -0.749 | -0.512 | -0.064 | 0.063 | -1.108 | -0.034 | -1.010 |
| -0.655 | -1.232 | -0.058 | -0.799 | -0.346 | -0.247 | -0.711 | 0.196 | -0.757 | 0.813 |
| 1.195 | 1.145 | 0.011 | 1.465 | 0.532 | 0.485 | -0.795 | -1.602 | -0.590 | 0.995 |
| -0.896 | 0.867 | 0.790 | 0.115 | 1.496 | 0.686 | -0.058 | 0.048 | -0.036 | -0.201 |
| 0.768 | 0.908 | -0.538 | 0.469 | 0.819 | 0.303 | 0.552 | -0.148 | -0.168 | 0.730 |
| -0.206 | 0.763 | -0.852 | -1.084 | 0.620 | -1.496 | -0.590 | -2.620 | -1.161 | -2.161 |
| 1.501 | 0.080 | 2.316 | -0.279 | -0.568 | 0.580 | -0.183 -2.552 -0.120 | | | 1.459 |
| -1.039 | 0.836 | -0.522 | -0.744 | -1.195 | 0.090 | -1.614 | 0.733 | -1.001 | -0.158 |
| -1.096 | 1.729 | -2.352 | -0.287 | 2.109 | -0.250 | 0.137 | -0.769 | 1.479 | 0.310 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.013 | 0.341 | 0.677 | -0.452 | -0.055 | -0.235 | -0.462 | -1.100 | -0.035 | -0.350 |
| 0.407 | 0.050 | 0.256 | -0.098 | 1.150 | -0.401 | 0.766 | 1.122 | -0.399 | 1.414 |
| 1.143 | -0.951 | 0.664 | 0.686 | -0.402 | -2.309 | -0.528 | 0.396 | -0.609 | 0.322 |
| -0.853 | -0.067 | 1.175 | 1.065 | 1.428 | -0.754 | 0.640 | -1.014 | 0.509 | 1.020 |
| -1.133 | -1.685 | -0.662 | 0.392 | -1.182 | -0.140 | -0.417 | 0.259 | 1.024 | -0.528 |
| 0.544 | 1.254 | 0.384 | 2.243 | 0.708 | 1.029 | -2.864 | -0.312 | 0.434 | 0.352 |
| -1.805 | 0.774 | 0.155 | 1.138 | -0.065 | -0.118 | 1.066 | -0.674 | -0.149 | 0.486 |
| 2.195 | -1.119 | 0.080 | -0.889 | -0.079 | 0.522 | -3.046 | 0.603 | 0.992 | -0.488 |
| -0.208 | -0.272 | 1.957 | -1.749 | -0.164 | 1.554 | 0.186 | 1.277 | 0.577 | -0.061 |
| 0.715 | -0.289 | 1.960 | -0.761 | 1.272 | -0.220 | -0.083 | 0.559 | -2.140 | -0.666 |
| -0.142 | 0.509 | 0.135 | 0.208 | 0.147 | -1.993 | 0.651 | 1.220 | -0.538 | 0.599 |
| -0.151 | -0.855 | 0.760 | -0.679 | -0.229 | -2.238 | 1.483 | -0.172 | 1.439 | 0.242 |
| 0.319 | 0.036 | -1.478 | 0.636 | 1.679 | -0.861 | 0.569 | 2.810 | -0.690 | 1.198 |
| -1.119 | -0.356 | 0.220 | -0.808 | 1.238 | -2.127 | -0.672 | -0.065 | 0.319 | 0.911 |
| 0.483 | 0.849 | -1.205 | 0.081 | -0.663 | -0.246 | -1.377 | -0.572 | 2.336 | -0.164 |
| 0.445 | -0.211 | 0.970 | 0.198 | 0.493 | 0.168 | 1.491 | -0.997 | -1.542 | 0.262 |
| -0.226 | 0.809 | -1.062 | 0.448 | -0.040 | 1.542 | -0.520 | 0.519 | -0.424 | -0.298 |
| -0.079 | -0.189 | 2.402 | 0.088 | 0.721 | 0.300 | 0.316 | 0.636 | -0.996 | 0.643 |
| -0.819 | -0.046 | 1.647 | 0.399 | 0.949 | 0.151 | 1.286 | 0.102 | -0.713 | -1.727 |
| -0.143 | 1.382 | -1.039 | -0.676 | 0.377 | -0.084 | -1.476 | 0.552 | -1.675 | -0.895 |
| 0.802 | 0.834 | 1.776 | -0.758 | 2.634 | 1.146 | 0.655 | 0.492 | -2.286 | -0.431 |
| 0.438 | 0.857 | 0.357 | 0.052 | 1.248 | -0.146 | -2.766 | 2.056 | 0.307 | 0.758 |
| -1.251 | -0.275 | 1.089 | -0.336 | 0.330 | -0.148 | -0.919 | -1.530 | 1.557 | 2.032 |
| 0.750 | 1.982 | -1.252 | 1.476 | 0.100 | 0.284 | -0.400 | 0.396 | -0.660 | -1.504 |
| 2.625 | -0.795 | 0.142 | 0.618 | -2.100 | 0.010 | 1.239 | -0.339 | 0.125 | 0.678 |
| -0.653 | -0.682 | 0.290 | 0.002 | -0.703 | 1.264 | 0.446 | -0.617 | 0.346 | 1.083 |
| 1.319 | 1.849 | -1.051 | -0.240 | 0.762 | 0.367 | 0.743 | 0.189 | -0.633 | 0.879 |
| 2.026 | -0.328 | 0.510 | -0.592 | -0.739 | -0.225 | 1.264 | -1.126 | -0.472 | 0.322 |
| -0.282 | 0.112 | 0.774 | 2.315 | -1.084 | -0.268 | -2.129 | -0.496 | 0.366 | -0.933 |
| -2.360 | -0.210 | -1.095 | -0.225 | 0.966 | -0.690 | -2.045 | 0.826 | 2.481 | -1.090 |
| -1.552 | -0.473 | -0.135 | -1.129 | -0.394 | -1.830 | -1.174 | -0.771 | -0.654 | 0.764 |
| -1.268 | -0.879 | -0.220 | 0.886 | 0.270 | 0.169 | -1.246 | 2.233 | -0.582 | -1.093 |
| 0.967 | -0.167 | 0.972 | 0.608 | 0.544 | -0.636 | 0.632 | -0.096 | 0.280 | -0.211 |
| -0.041 | -0.285 | 0.075 | -2.535 | -0.777 | 1.179 | -1.752 | 1.138 | -1.945 | -0.270 |
| 0.299 | 0.067 | -0.531 | 0.060 | -0.373 | 0.501 | 0.044 | -0.648 | -1.330 | 0.513 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1.042 | -0.533 | -0.230 | 1.292 | -1.612 | 0.424 | -1.668 | -0.351 | -0.748 | 1.473 |
| 0.691 | -1.018 | 0.599 | -1.179 | -0.272 | 0.768 | 0.426 | -0.050 | 1.182 | 2.237 |
| -1.123 | 0.250 | 1.864 | -0.069 | -0.796 | 0.075 | 0.446 | -0.810 | -0.354 | -0.259 |
| -1.389 | -0.533 | -1.918 | 0.236 | 0.309 | -0.789 | 0.398 | 0.075 | -1.747 | 1.192 |
| -0.084 | 1.016 | -1.216 | 0.843 | -0.156 | 1.157 | 0.004 | 0.838 | -0.251 | -0.878 |
| 0.059 | 0.839 | -0.905 | 0.874 | 0.398 | 0.056 | -0.205 | -1.293 | 0.331 | -1.315 |
| -0.906 | 0.335 | -1.021 | 0.046 | 2.298 | 0.059 | -0.175 | -0.131 | 0.080 | 0.323 |
| 0.882 | -0.454 | -0.436 | 0.808 | 0.721 | 0.341 | -0.327 | -0.792 | -0.216 | -0.790 |
| 0.519 | -0.219 | 1.338 | 1.392 | -0.828 | -1.631 | -0.271 | 0.751 | 0.641 | -0.333 |
| 2.550 | 0.155 | 1.070 | 0.387 | -0.068 | 0.554 | 0.208 | -0.217 | 1.130 | 0.324 |
| 1.611 | -0.330 | 0.354 | 0.658 | -0.234 | -1.576 | -1.283 | -0.684 | -0.675 | 2.214 |
| 0.318 | 0.658 | -1.038 | -0.269 | 0.627 | 1.039 | -0.381 | 0.065 | -1.649 | -0.153 |
| -2.002 | 1.559 | -0.341 | 0.080 | 1.192 | 0.216 | 0.533 | -1.086 | 0.095 | 0.815 |
| 2.376 | -0.031 | -0.084 | -0.053 | -0.331 | -0.918 | 0.003 | -1.880 | 0.940 | 0.193 |
| 0.068 | 1.404 | 0.870 | 0.021 | 0.801 | 0.883 | 1.592 | 0.457 | -0.464 | 1.789 |
| -0.221 | -0.938 | -0.211 | 0.600 | 0.584 | -1.086 | -0.906 | 0.246 | -0.438 | 0.167 |
| 0.168 | 0.596 | 1.186 | 0.780 | -0.834 | 1.380 | 0.736 | 0.092 | 0.473 | -0.020 |
| 0.808 | 0.153 | 0.195 | -1.230 | -0.546 | -0.074 | -0.651 | 1.898 | -0.226 | -1.009 |
| 1.397 | -1.450 | 0.241 | -0.733 | -0.736 | 0.321 | 0.805 | 0.669 | -2.284 | -0.074 |
| -0.670 | -1.736 | 0.603 | 0.222 | -1.225 | 0.310 | 0.595 | 0.325 | -0.626 | 0.614 |
| -1.887 | 0.708 | 1.335 | -1.116 | 0.177 | 0.437 | -0.933 | -0.276 | -0.074 | 0.180 |
| 0.793 | -0.385 | 1.228 | 0.752 | -0.029 | -0.463 | 1.223 | -1.897 | 0.776 | -0.444 |
| 0.836 | 0.785 | -0.359 | 2.134 | -0.820 | 1.782 | -0.562 | -1.545 | 1.348 | -0.169 |
| 0.060 | 0.728 | -0.772 | 1.201 | 0.114 | 1.546 | 0.718 | 1.341 | 0.673 | -0.181 |
| 1.557 | -0.978 | -0.389 | 0.990 | 0.627 | 0.527 | 0.071 | -0.337 | -1.683 | -0.139 |
| -0.468 | 0.401 | -0.304 | 0.276 | -0.450 | -0.711 | -0.182 | 1.683 | -1.632 | 2.336 |
| -0.145 | 1.097 | 1.152 | -0.139 | 0.949 | 0.251 | 0.549 | -1.319 | -0.237 | 0.056 |
| 1.147 | -0.685 | -0.349 | -1.428 | -0.934 | -0.864 | 0.234 | 0.829 | 1.731 | -1.986 |
| 0.441 | -0.086 | 1.428 | 0.130 | 1.155 | 2.460 | -1.030 | 1.864 | -0.723 | -0.479 |
| 0.503 | -1.133 | 0.685 | 0.452 | -1.270 | -1.454 | -0.433 | -0.443 | -1.068 | 1.346 |
| -1.725 | 1.345 | 2.339 | -2.472 | -0.402 | -1.031 | 1.151 | 1.230 | 0.008 | 1.041 |
| 1.066 | 0.608 | -0.753 | 1.051 | -0.108 | -0.293 | 0.494 | 0.384 | -1.872 | 0.329 |
| 0.328 | -0.114 | 0.566 | -1.948 | -0.589 | 1.154 | 0.663 | 0.142 | 1.821 | -1.046 |
| 0.385 | 0.517 | 1.360 | 0.086 | -0.428 | 0.173 | -0.372 | -0.271 | -1.081 | -2.004 |
| -0.135 | -1.803 | -1.608 | 0.778 | 0.010 | -0.215 | -2.060 | -0.461 | -0.122 | 1.998 |

ОГЛАВЛЕНИЕ

***Типовой расчет по теории вероятностей***

Тема 1. Непосредственный подсчѐт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей 3

Тема 2. Формула полной вероятности и формула Байеса 8

Тема 3. Повторение опытов (схема Бернулли) 13

Тема 4. Дискретные случайные величины 17

Тема 5. Непрерывные случайные величины 23

Тема 6. Функции случайных величин 30

*Типовой расчет по математической статистике*

Тема 1. Оценивание, проверка статистических гипотез. Методические

указания 38

Составление статистического ряда, гистограммы и нахождение точечных оценок математического ожидания и дисперсии 38

Построение доверительного интервала 43

Проверка статистических гипотез 44

Тема 2. Корреляция и регрессия. Построение выборочного уравнения линии линейной регрессии. Методические указания 45

[Варианты индивидуальных заданий 50](#_TOC_250000)

Приложение 1. Стандартное нормальное распределение… 53

Приложение 2. Распределение хи-квадрат 54

Приложение 3. Данные для формирования индивидуальных заданий по теме “Оценивание, проверка статистических гипотез” 55